

# Concetti chiave e regole

## Angoli e misure

Gli angoli si possono misurare in **gradi** oppure in **radianti**:

- se  $\alpha$  è un angolo al centro di una circonferenza di raggio  $r$  che insiste su un arco  $AB$ :

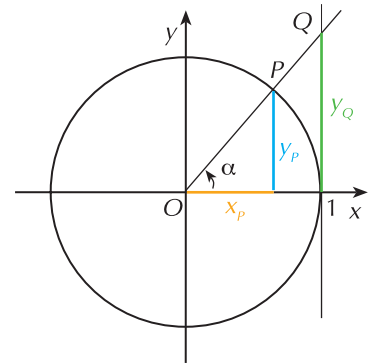
$$\alpha \text{ (in radianti)} = \frac{\text{lunghezza dell'arco } AB \text{ rettificato}}{r}$$

- se  $x$  è la misura di  $\alpha$  in radianti e  $y$  è quella in gradi, per passare da un sistema all'altro si usa la proporzione  $y : x = 360^\circ : 2\pi$

## Le funzioni goniometriche fondamentali e i grafici

Considerata la circonferenza goniometrica (avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e raggio unitario) ed un angolo  $\alpha$  avente vertice nell'origine e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse, si definisce:

- $\sin \alpha$  l'ordinata del punto  $P$
- $\cos \alpha$  l'ascissa del punto  $P$
- $\tan \alpha$  l'ordinata del punto  $Q$



Si introducono poi le seguenti funzioni che sono le reciproche di quelle fondamentali:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \operatorname{cot} \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

## Le relazioni fondamentali

Le relazioni fondamentali che legano le funzioni goniometriche sono:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

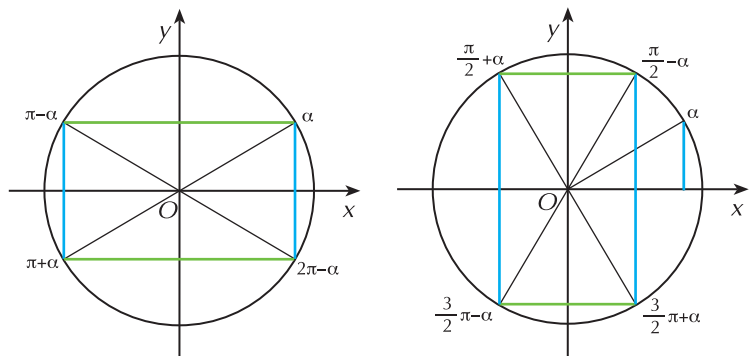
Da esse si ricavano le formule di:

- $\sin \alpha$  in funzione di  $\cos \alpha$ :  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
- $\sin \alpha$  in funzione di  $\tan \alpha$ :  $\sin \alpha = \pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$
- $\cos \alpha$  in funzione di  $\sin \alpha$ :  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$
- $\cos \alpha$  in funzione di  $\tan \alpha$ :  $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$

La seconda relazione fondamentale consente poi di stabilire che il coefficiente angolare di una retta rappresenta la tangente dell'angolo  $\alpha$  che essa forma con la direzione positiva dell'asse  $x$ :  $m = \tan \alpha$ .

## Gli archi associati

Gli angoli associati ad un angolo  $\alpha$  sono quelli che hanno i valori delle funzioni goniometriche complessivamente uguali a quelli di  $\alpha$ . Per ricavare i valori del seno, del coseno e della tangente di tali angoli basta ricordare i seguenti disegni:



## Le formule

- Addizione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

- Bisezione

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

- Prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

- Duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \begin{cases} 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

- Parametriche  $\forall \alpha \neq \pi + 2k\pi$ :

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

- Werner:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$