APPROFONDIMENTO

Relazioni tra coefficienti e soluzioni

Riprendiamo l'analisi che abbiamo fatto in questo paragrafo per riconoscere se un sistema è determinato, indeterminato, impossibile.

Il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ è determinato se $\Delta = ae - bd \neq 0$.

Possiamo riscrivere questa condizione in un altro modo: $ae \neq bd \quad \rightarrow \quad \dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}$

Dunque il sistema è determinato se $\dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}$.

Sappiamo poi che il sistema è indeterminato se, essendo $\Delta = 0$, anche $\Delta x = 0 \wedge \Delta y = 0$, cioè $ce - bf = 0 \wedge af - cd = 0$.

Riscriviamo queste due condizioni in altro modo: $ce = bf \quad \rightarrow \quad \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}$

$af = cd \quad \rightarrow \quad \dfrac{a}{d} = \dfrac{c}{f}$

Dunque il sistema è indeterminato se $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}$.

Il sistema è invece impossibile se, essendo $\Delta = 0$, si verifica che $\Delta x \neq 0 \vee \Delta y \neq 0$, cioè $ce - bf \neq 0 \vee af - cd \neq 0$.

Riscriviamo in altro modo: $ce \neq bf \quad \rightarrow \quad \dfrac{b}{e} \neq \dfrac{c}{f}$

$af \neq cd \quad \rightarrow \quad \dfrac{a}{d} \neq \dfrac{c}{f}$

Dunque il sistema è impossibile se $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e}$ ma questi due rapporti sono diversi da $\dfrac{c}{f}$.

In definitiva, supposto che tutti i rapporti precedenti esistano, possiamo affermare che:

il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

- è **determinato** se $\dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}$ $\leftarrow$ rapporto fra i coefficienti di x diverso dal rapporto fra i coefficienti di y
- è **indeterminato** se $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}$ $\leftarrow$ rapporti fra i coefficienti dei termini corrispondenti tutti uguali tra loro
- è **impossibile** se $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \neq \dfrac{c}{f}$ $\leftarrow$ uguali i rapporti tra i coefficienti di x e di y, ma diversi dal rapporto fra i termini noti

Consideriamo per esempio i seguenti sistemi:

- $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases} \rightarrow \quad \dfrac{a}{d} = \dfrac{4}{3} \quad \dfrac{b}{e} = \dfrac{1}{4} \quad \rightarrow$ il sistema è determinato
- $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \quad \dfrac{a}{d} = \dfrac{4}{2} = 2 \quad \dfrac{b}{e} = \dfrac{2}{1} = 2 \quad \dfrac{c}{f} = \dfrac{8}{1} = 8 \quad \rightarrow$ il sistema è impossibile
- $\begin{cases} -8x + 4y = 12 \\ 6x - 3y = -9 \end{cases} \rightarrow \quad \dfrac{a}{d} = \dfrac{-8}{6} = -\dfrac{4}{3} \quad \dfrac{b}{e} = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3} \quad \dfrac{c}{f} = \dfrac{12}{-9} = -\dfrac{4}{3} \quad \rightarrow$ il sistema è indeterminato

ESERCIZI

Comprensione

1 Senza risolverlo, puoi dire che il sistema $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + \frac{3}{2}y = 9 \end{cases}$ è:

a. determinato **b.** indeterminato **c.** impossibile

2 In base all'analisi dei coefficienti, il sistema $\begin{cases} 2x + 3ky = 4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$:

a. è determinato se: ① $k \neq 0$ ② $k \neq -\frac{9}{4}$ ③ $k \neq -\frac{4}{9}$

b. è indeterminato se: ① $k = -\frac{4}{9}$ ② $k = -\frac{8}{9}$ ③ per nessun valore di k

c. è impossibile se: ① $k = -\frac{4}{9}$ ② $k = -\frac{8}{9}$ ③ per nessun valore di k

3 Completa mettendo un appropriato coefficiente in modo che i seguenti sistemi soddisfino la condizione indicata:

$\begin{cases} 2x - 6y = ... \\ 4x + ...y = 2 \end{cases}$ il sistema sia: **a.** determinato **b.** indeterminato **c.** impossibile

$\begin{cases} x - 4y = ... \\ 3x + ...y = 5 \end{cases}$ il sistema sia: **a.** determinato **b.** indeterminato **c.** impossibile

Applicazione

Tenendo presenti le relazioni ricordate, stabilisci la natura dei seguenti sistemi senza risolverli.

4 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$ [determinato; impossibile]

5 $\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + y = -10 \\ 6x - 2y = 20 \end{cases}$ [determinato; indeterminato]

6 $\begin{cases} x - 3 = -7y \\ 6 - 14y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 18y + 2 = 0 \\ 5 + 6y = -x \end{cases}$ [indeterminato; impossibile]

7 $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 6y = 1 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ [determinato; impossibile]

Dopo aver stabilito la natura dei seguenti sistemi, trova la soluzione di quelli determinati.

8 $\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 4x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{1}{3}, 0\right)\right\}; \text{ indeterminato}\right]$

9 $\begin{cases} -x + y + 4 = 0 \\ 3x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 5y - 6 = 0 \\ -3x - 15y - 18 = 0 \end{cases}$ [indeterminato; impossibile]

10 $\begin{cases} 3x+y-2=0 \\ 2x+3y+2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} -5x+2y+50=0 \\ -5x+3y+15=0 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{8}{7}, -\frac{10}{7}\right)\right\};\ S=\{(24, 35)\}\right]$

11 $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}=0 \\ 3x-2y+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x+\frac{1}{4}y-1=0 \\ -8x+y+4=0 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\};\ \text{impossibile}\right]$

12 $\begin{cases} \frac{1}{4}x+2y+1=0 \\ \frac{1}{8}x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} -13x+y-7=0 \\ x-\frac{1}{13}y+\frac{7}{13}=0 \end{cases}$ [impossibile; indeterminato]

Stabilisci, senza risolverli, per quale valore del parametro k i seguenti sistemi sono determinati, indeterminati o impossibili.

13 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\begin{cases} kx+(k-1)y=1 \\ x+2y=k \end{cases}$

Il rapporto fra i coefficienti di x è k. Il rapporto fra i coefficienti di y è $\frac{k-1}{2}$

Affinché il sistema sia determinato deve essere: $k \neq \frac{k-1}{2}$ cioè $k \neq -1$

Per $k=-1$, il rapporto fra i coefficienti di x è uguale al rapporto fra i coefficienti di y e vale -1; il rapporto fra i termini noti è uguale a -1, quindi il sistema è indeterminato.

14 $\begin{cases} x-y+5=0 \\ x-y+k-3=0 \end{cases}$ [se $k=8$: sistema indeterminato; se $k \neq 8$: sistema impossibile]

15 $\begin{cases} 2x-ky+6=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ [se $k \neq -2$: determinato; se $k=-2$: impossibile]

16 $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ kx-(k+1)y+2=0 \end{cases}$ [se $k=-\frac{3}{2}$: sistema impossibile; se $k \neq -\frac{3}{2}$: sistema determinato]

17 $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ (k+1)x-(k+2)y+1=0 \end{cases}$ [se $k=-\frac{4}{3}$: sistema indeterminato; se $k \neq -\frac{4}{3}$: sistema determinato]

18 $\begin{cases} x-2ky+3=0 \\ (k+1)x-(k+3)y-1=0 \end{cases}$ [se $k=1 \ \vee\ k=-\frac{3}{2}$: sistema impossibile; se $k \neq 1 \ \wedge\ k \neq -\frac{3}{2}$: sistema determinato]