

APPROFONDIMENTO

La curva $y = e^x$

Le curve esponenziali con $a > 1$ hanno un grafico che cresce dapprima in modo lento, ma che diventa sempre più ripido al crescere di x .

La rapidità con cui una funzione cresce può essere misurata attraverso la pendenza delle rette ad essa tangenti; per esempio, delle due funzioni rappresentate in **figura 1** possiamo dire che nel punto x_0 la curva G_1 cresce in modo più rapido della curva G_2 perché in questo punto la retta tangente a G_1 ha una pendenza maggiore della retta tangente a G_2 .

Nel punto di coordinate $(0, 1)$, che è comune a tutte le curve esponenziali, ogni curva ha la sua retta tangente con una pendenza diversa a seconda del valore della base.

Nella tabella che segue abbiamo scritto nella prima colonna l'equazione di alcune funzioni esponenziali con basi diverse ma tutte maggiori di 1 e nella seconda colonna il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $(0, 1)$.

$y = a^x$	Coeff. angolare
$y = 1,5^x$	0,4055
$y = 2^x$	0,6931
$y = 2,5^x$	0,9163
$y = 2,7^x$	0,9933
$y = 2,71^x$	0,9969
$y = 2,718^x$	0,9999
$y = 2,719^x$	1,0003
$y = 2,8^x$	1,0296
$y = 2,9^x$	1,0647
$y = 3^x$	1,0986

Dai risultati ottenuti si evidenzia che la pendenza cresce al crescere della base, come ci dovevamo aspettare viste le considerazioni fatte su questa curva; il coefficiente angolare si mantiene minore di 1 quando $a \leq 2,718$ e diventa maggiore di 1 quando $a \geq 2,719$. È ragionevole supporre che ci sia un valore di a compreso tra 2,718 e 2,719 per il quale il coefficiente angolare è esattamente uguale a 1. Questo numero esiste e si indica con la lettera e .

Impareremo a conoscerlo meglio con tutte le sue caratteristiche proseguendo i nostri studi; per ora dobbiamo limitarci a dire che si tratta di un numero irrazionale del quale si conoscono qualche migliaio di cifre decimali, calcolate grazie all'impiego di potenti computer. A noi basta comunque conoscere un suo valore approssimato anche con poche cifre decimali

$$e = 2,71828\dots$$

La funzione $y = e^x$ ha quindi un grafico come quello in **figura 2a** dove abbiamo evidenziato che la retta ad essa tangente nel punto $(0, 1)$ ha coefficiente angolare 1, cioè ha un'inclinazione di 45° rispetto alla direzione positiva dell'asse x ; la sua simmetrica rispetto all'asse y ha equazione $y = e^{-x}$ e la retta ad essa tangente nello stesso punto ha coefficiente angolare -1 (**figura 2b**).

Figura 1

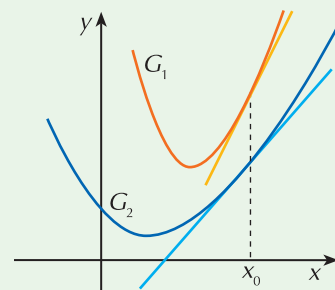


Figura 2

