Concetti chiave e regole

Intervalli, intorni e punti di accumulazione

Si chiama **intervallo** un qualunque insieme di numeri reali compresi fra altri due a e b, dove a o b possono essere finiti o infiniti. In particolare:

- $(a,\ b)$ è un intervallo aperto che corrisponde all'insieme degli x tali che $a < x < b$
- $[a,\ b]$ è un intervallo chiuso che corrisponde all'insieme degli x tali che $a \le x \le b$

In pratica, la parentesi tonda indica che l'estremo dell'intervallo non appartiene all'insieme, la parentesi quadra indica che gli appartiene; sui simboli di ∞ si usa solo la parentesi tonda.

Intorno di un punto x_0 è ogni intervallo aperto che contiene x_0 al suo interno; intorno di $+\infty$ è un qualunque intervallo del tipo $(a,\ +\infty)$, intorno di $-\infty$ è un qualunque intervallo del tipo $(-\infty,\ b)$, intorno di infinito è l'unione di un intorno di $-\infty$ con un intorno di $+\infty$.

Un punto x_0 si dice di **accumulazione** per un insieme E se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E.

Le definizioni di limite

Una funzione ha per limite un numero ℓ finito per $x \to c$ (con c finito o infinito) se la disequazione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ ha fra le sue soluzioni un intorno di c.
Una funzione ha per limite ∞ per $x \to c$ (con c finito o infinito) se la disequazione $|f(x)| > M$ è verificata in un intorno di c.

Teoremi sui limiti

Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell'$ e ℓ e ℓ' sono due valori finiti, allora:

- $\lim\limits_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm \ell'$
- $\lim\limits_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot \ell'$
- $\lim\limits_{x\to c} [k \cdot f(x)] = k\ell$ con $k \in R$
- $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = \ell^n$
- $\lim\limits_{x\to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\ell}{\ell'}$ se $\ell' \neq 0$

Le forme di indeterminazione

Nel calcolo di un limite, generalmente quando c è infinito oppure i limiti ℓ e ℓ' sono nulli, si può giungere a quelle che si chiamano **forme di indeterminazione** che sono:

$$(+\infty) - (+\infty) \qquad (+\infty) + (-\infty) \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{0}{0} \qquad 1^{\pm\infty} \qquad 0^0 \qquad (\pm\infty)^0$$

Per risolvere alcune di queste forme occorre tenere presenti queste regole:

- il limite per $x \to \infty$ di un polinomio è uguale al limite del termine di grado massimo:

$$\lim_{x\to\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\infty} a_0x^n$$

- il limite per $x \to \infty$ del rapporto fra due polinomi è uguale al limite del rapporto fra i termini di grado massimo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^k + ...a_k}{b_0x^h + ...b_h} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^k}{b_0x^h}$$

e si ha che: - se $k > h$ il limite vale ∞; - se $k = h$ il limite vale $\dfrac{a_0}{b_0}$; - se $k < h$ il limite vale 0

- se $\lim_{x\to c}\frac{A(x)}{B(x)}$ si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, si semplifica la frazione scomponendo i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ e si calcola il limite della funzione che si ottiene
- se $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{A(x)}\pm\sqrt{B(x)}\right)$ si presenta nella forma $\infty-\infty$, si moltiplica e si divide per $\left(\sqrt{A(x)}\mp\sqrt{B(x)}\right)$ e si calcola il limite della funzione che si ottiene.

I limiti notevoli

Valgono i seguenti limiti notevoli:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ e $\lim_{x\to c}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ quando $f(x)\to 0$ per $x\to c$
- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ e $\lim_{x\to c}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$ quando $f(x)\to\infty$ per $x\to c$

Infiniti e infinitesimi

Si dice che:

- la funzione $y=f(x)$ è un **infinitesimo** per $x\to c$ se $\lim_{x\to c}f(x)=0$
- la funzione $y=f(x)$ è un **infinito** per $x\to c$ se $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$.

Di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe infinitesime per $x\to c$ diciamo che:

- $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
- $f(x)$ è dello stesso ordine di $g(x)$ se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell\neq 0$
- $f(x)$ è di ordine inferiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

Di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe infinite per $x\to c$ diciamo che:

- $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$
- $f(x)$ è dello stesso ordine di $g(x)$ se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell\neq 0$
- $f(x)$ è di ordine inferiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

Le successioni

Una **successione** è una funzione che ha come dominio l'insieme N dei numeri naturali.

Indicata con a_n l'espressione del suo termine generale, una successione può essere:

- **convergente** se $\lim_{n\to+\infty}a_n=\ell$

  cioè se $\forall\varepsilon>0$ esiste un indice ν tale che $\forall n>\nu$ sia $|a_n-\ell|<\varepsilon$

- **divergente** se $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ oppure $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

  cioè se, $\forall M > 0$, esiste un indice ν tale che $\forall n > \nu$ sia rispettivamente $a_n > M$ o $a_n < -M$.

- **irregolare** se né converge né diverge.

Per il calcolo del limite di una successione valgono teoremi analoghi a quelli studiati per i limiti delle funzioni di numeri reali.