Esercizi di consolidamento

Equazioni con i moduli

Risolvi le seguenti equazioni con i moduli.

1 **esercizio guidato**

$|x^2 + 5x - 6| = 6$

Per togliere il modulo dobbiamo valutare il segno del suo argomento:

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ x^2 + 5x - 6 = 6 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0 \\ x^2 + 5x - 6 = -6 \end{cases}$$

Osserviamo che la disequazione dei due sistemi è superflua perchè, per quanto riguarda il primo sistema, se $x^2 + 5x - 6$ deve essere uguale a 6, allora è anche maggiore di zero; analogamente, per quanto riguarda il secondo sistema, se $x^2 + 5x - 6$ deve essere uguale a -6, allora è anche minore di zero.
L'equazione data è quindi equivalente alle due equazioni:

$$x^2 + 5x - 6 = 6 \quad \vee \quad x^2 + 5x - 6 = -6$$

che hanno soluzioni $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{73}}{2} \quad \vee \quad x = 0 \ \vee \ x = -5$

2 $|2x^2 + x| + 5 = 0$ [impossibile]

3 $|3x^2 - 1| - 4 = 0$ $\left[\pm \dfrac{\sqrt{15}}{3}\right]$

4 $|4x^2 - 1| - 4 = 0$ $\left[\pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$

5 $10 + |x^2 - 4| = 1$ [impossibile]

6 $6 - \big|3x(x - 1)\big| = 0$ $[-1, 2]$

7 $9 = |(x + 2)(2x - 3)|$ $\left[-3; \dfrac{5}{2}\right]$

8 $|2x^2 + x + 1| + 6 = 0$ [impossibile]

9 $|3x - x^2 + 1| = 3$ $[\pm 1, 2, 4]$

10 $5 - 3|3x^2 - 4x - 4| = -10$ $\left[\dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{2 \pm \sqrt{31}}{3}\right]$

11 $5|4x^2 - 6x| + 2 = 0$ [impossibile]

12 $(x - 1)|x| = 3x - 4$ $[2, -1 - \sqrt{5}]$

13 **esercizio guidato**

$|x^2 - 4| = 4 + 2x$

L'equazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 = 4 + 2x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -x^2 + 4 = 4 + 2x \end{cases}$$

Questa volta però non possiamo ritenere superflua la disequazione; questo significa che dovremo vedere se le radici delle due equazioni soddisfano le disequazioni del proprio sistema:

- primo sistema: $\begin{cases} x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases}$

  risolvendo l'equazione si ottiene $x = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$ che sono entrambe accettabili

- secondo sistema: $\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases}$

  risolvendo l'equazione si ottiene $x = \begin{cases} -2 \\ 0 \end{cases}$ ed è accettabile solo $x = 0$

In definitiva, le soluzioni sono $-2, 0, 4$.

14 $|x^2 - 1| - 3x = 3$ $\qquad |x^2 + x| = 1 - x$ $\qquad [-1, 4; \ -1 \pm \sqrt{2}]$

15 $|x^2 - x| + x = 2$ $\qquad 2 + |x^2 - 4| = x + 4$ $\qquad [\pm\sqrt{2}; \ -2, 1, 3]$

16 $|x^2 - 9| - 2x^2 = 0$ $\qquad 3x^2 - |2x - x^2| = 0$ $\qquad \left[\pm\sqrt{3}; \ -1, 0, \frac{1}{2}\right]$

17 $2x^2 - 15x + 25 - |x^2 - 25| = 0$ $\qquad 4|x^2 + x - 2| + 8x = 0$ $\qquad \left[0, 5, 10; \ -1, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$

18 $2|x^2 - 2| = (x - 3)^2 + 2x - 1$ $\qquad 1 + x = |x^2 - 1|$ $\qquad [-6, 2; \ -1, 0, 2]$

Disequazioni con i moduli

Risolvi le seguenti disequazioni con i moduli.

19 **esercizio guidato**

$|9x^2 - 1| < 3$

La disequazione è equivalente al sistema: $\begin{cases} 9x^2 - 1 > -3 \\ 9x^2 - 1 < 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{sempre verificata} \\ -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3} \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è quindi: $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$.

20 $|x^2 - 5x + 3| < 3$ $[3 < x < 5 \ \vee \ 0 < x < 2]$

21 $|3x^2 + 4x| < 4$ $\left[-2 < x < \frac{2}{3}\right]$

22 $|x^2 - 10x| < 0$ [impossibile]

23 **esercizio guidato**

$|x^2 - 6x| > 1$

La disequazione è equivalente alle due seguenti: $x^2 - 6x < -1 \ \vee \ x^2 - 6x > 1$

Risolvendo la prima si ottiene: $3 - 2\sqrt{2} < x < 3 + 2\sqrt{2}$

Risolvendo la seconda si ottiene: $x < 3 - \sqrt{10} \ \vee \ x > 3 + \sqrt{10}$

Unendo i due risultati si ottiene l'insieme soluzione della disequazione data:

$$x < 3 - \sqrt{10} \ \vee \ 3 - 2\sqrt{2} < x < 3 + 2\sqrt{2} \ \vee \ x > 3 + \sqrt{10}$$

24 $|4 - x^2| + 1 > 0$ [indeterminata]

25 $|1 - 5x + 6x^2| \geq 0$ [indeterminata]

26 **esercizio guidato**

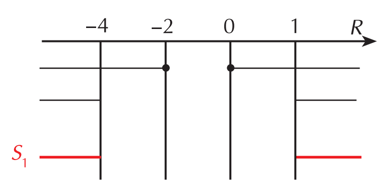
$|x^2 + 2x| - 3 > 1 - x$

La disequazione è equivalente ai seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 1 - x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ -x^2 - 2x - 3 > 1 - x \end{cases}$$

Risolvendo il primo otteniamo:

$$\begin{cases} x \leq -2 \ \vee \ x \geq 0 \\ x < -4 \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$



$S_1 : x < -4 \ \vee \ x > 1$

Risolvendo il secondo sistema otteniamo: $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ \text{mai verificata} \end{cases} \quad \rightarrow \quad S_2 : \varnothing$

L'insieme delle soluzioni è l'unione dei due insiemi S_1 e S_2 ed è: $S : x < -4 \ \vee \ x > 1$.

27 $|5 - x^2| < 1 - 2x$ $[-1 - \sqrt{7} < x < 1 - \sqrt{5}]$

28 $|3 - x^2| + x^2 - 2x \geq 0$ $\left[x \leq \frac{3}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right]$

29 $x^2 - |2x - 3| + 1 < 0$ $[-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}]$

30 $x + |3x^2 + 2x - 1| \geq x(x - 4) + 8$ $\left[x \leq -\frac{9}{2} \ \vee \ x \geq 1\right]$

31 $x^2 + 1 \leq 2|x|$ $[x = \pm 1]$

32 $|x(x - 2)| + 5x < 5(3 + x)$ $[-3 < x < 5]$

33 $1 + |x^2 - 4| > 5 - x(x - 2)$ $\left[x < 0 \ \vee \ x > \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$

34 $6(x^2 + 14 - 9x) \leq |16x - x^2 - 28|$ $[2 \leq x \leq 8]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

35 esercizio guidato

$y = \sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{x^2 - 1}$

Un radicale di indice pari esiste se il suo argomento è positivo o nullo; devi quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$ $[x \leq -\sqrt{3} \ \vee \ x \geq \sqrt{3}]$

36 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x + 1}}$ $[-1 < x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1]$

37 $y = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 3x^2 + 2x}} + \sqrt{x}$ $\left[0 \leq x < \dfrac{5}{3}\right]$

38 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{3x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 2x}}$ $[x > 0]$

39 $y = \dfrac{x + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{2x^2 - 7x + 3}}$ $[x > 3]$

40 $y = \dfrac{x^2 - x\sqrt{x}}{3 + \sqrt{4 - x^2}}$ $[0 \leq x \leq 2]$

Costruisci il grafico delle seguenti funzioni.

41 $y = 2x - |x + 1|$

42 $y = |2x - 1| + 4$

43 $y = |x^2 - 1| + 3$

44 $y = |x - x^2| + x - 1$

45 $y = 3x - \left|\dfrac{1}{2}x^2 + 1\right|$

46 $y = |2x^2 - 3x|$