ALGEBRA

LE FUNZIONI MATEMATICHE E IL PIANO CARTESIANO

IL PIANO CARTESIANO

richiami della teoria

- La **geometria analitica** è la disciplina che studia le figure geometriche mediante i metodi dell'algebra;
- il **piano cartesiano** si compone di due rette orientate (verso destra e verso l'alto) tra loro perpendicolari che assumono il nome di **assi cartesiani**: asse delle **ascisse** (o delle x); asse delle **ordinate** (o delle y); il punto di intersezione degli assi è detto **origine**;
- un **punto del piano** è individuato da una coppia $(x; y)$ di numeri; essi corrispondono alla distanza del punto dall'asse orizzontale e verticale; tale coppia prende il nome di **coordinate cartesiane**;
- il **piano cartesiano** si divide in **quattro settori** o **quadranti**:
  - 1° quadrante: punti con ascissa e ordinata positiva;
  - 2° quadrante: punti con ascissa negativa e ordinata positiva;
  - 3° quadrante: punti con ascissa negativa e ordinata negativa;
  - 4° quadrante: punti con ascissa positiva e ordinata negativa;
- la **distanza** tra due punti A e B:
  - di uguale ordinata è data dalla differenza delle rispettive ascisse in valore assoluto;
  - di uguale ascissa è data dalla differenza delle rispettive ordinate in valore assoluto;
  - generici nel piano si calcola costruendo un triangolo rettangolo avente per cateti le proiezioni del segmento AB sugli assi cartesiani e applicando il teorema di Pitagora;
- le **coordinate del punto medio *M*** di un segmento AB sono date dalle semisomme delle ascisse e delle ordinate degli estremi del segmento;
- per **rappresentare i poligoni** nel piano cartesiano basta individuare i vertici e unirli con spezzate, determinandone così i lati;
- per calcolare il **perimetro** dei poligoni nel piano cartesiano basta determinare la misura dei lati mediante le formule per il calcolo della distanza fra due punti e sommare i risultati parziali ottenuti;
- per calcolare l'**area** dei poligoni nel piano cartesiano basta determinare la misura delle dimensioni mediante le formule per il calcolo della distanza fra due punti e applicare le formule per il calcolo delle aree.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

1 Completa la seguente definizione:
la geometria analitica è la disciplina che studia .... mediante ....

2 Un punto appartenente al secondo quadrante ha:
a. ascissa positiva e ordinata positiva;
b. ascissa negativa e ordinata positiva;
c. ascissa negativa e ordinata negativa.

3 La misura della distanza tra due punti A e B aventi uguale ordinata è data:
a. dalla differenza delle rispettive ordinate in valore assoluto;
b. dalla differenza delle rispettive ordinate;
c. dalla differenza delle rispettive ascisse in valore assoluto.

4 La misura della distanza tra due punti A e B aventi uguale ascissa è data:
a. dalla differenza delle rispettive ordinate in valore assoluto;
b. dalla differenza delle rispettive ordinate;
c. dalla differenza delle rispettive ascisse in valore assoluto.

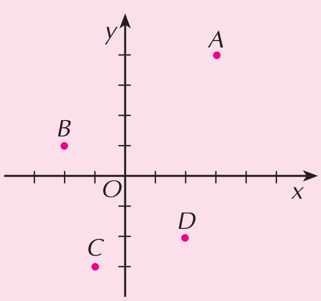
5 Completa la seguente regola:
per determinare la distanza tra due punti generici A e B nel piano cartesiano si calcola la misura dell'ipotenusa del .... avente per cateti ....

6 Qual è la formula per calcolare le coordinate del punto medio di un segmento AB?
a. $x_M = x_A + x_B$ e $y_M = y_A + y_B$;
b. $x_M = (x_A + x_B) \cdot 2$ e $y_M = (y_A + y_B) \cdot 2$;
c. $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

APPLICAZIONE

7 *Esercizio Svolto*

Rappresenta in un piano cartesiano i punti $A(3; 4)$; $B(-2; 1)$; $C(-1; -3)$ e $D(2; -2)$.



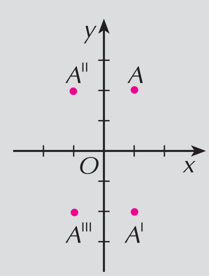
Il punto A ha i valori dell'ascissa e dell'ordinata entrambi positivi e si trova nel primo quadrante.
Il punto B ha il valore dell'ascissa negativo e quello dell'ordinata positivo e si trova nel secondo quadrante.
Il punto C ha i valori dell'ascissa e dell'ordinata entrambi negativi; si trova nel terzo quadrante.
Il punto D ha il valore dell'ascissa positivo e quello dell'ordinata negativo; si trova nel quarto quadrante.

8 Rappresenta in un piano cartesiano i punti $A(-1; 5)$; $B(-3; -2)$; $C(4; -1)$ e $D(3; 1)$.

9 *Esercizio Guidato*

Rappresenta in un piano cartesiano il punto $A(1; 2)$; traccia i suoi punti simmetrici rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine e scrivi le rispettive coordinate.

Per calcolare le coordinate del punto simmetrico di A:
- rispetto all'asse x basta cambiare il segno all'ordinata ottenendo il punto $A'(.....; .....)$;
- rispetto all'asse y basta cambiare il segno .... ottenendo il punto ....;
- rispetto all'origine basta cambiare il segno .... ottenendo il punto ....



10 Rappresenta in un piano cartesiano il punto $A(2; -3)$; trova il punto A' simmetrico rispetto all'asse x, il punto A'' simmetrico rispetto all'asse y e A''' simmetrico rispetto all'origine.

Calcola la distanza tra i seguenti punti.

11 *Esercizio Svolto*

$A(-4;-1)$ $\qquad$ $B(-1;3)$.

Applichiamo la formula relativa alla distanza:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(-4+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

12 $A(4;\ -1)$ $\qquad$ $B(-2;2)$. $\qquad$ [$\approx 6{,}7$]

13 $A(4;10)$ $\qquad$ $B(-8;5)$. $\qquad$ [13]

14 $A(1;-2)$ $\qquad$ $B(-3;1)$. $\qquad$ [5]

15 Rappresenta nel piano cartesiano i punti $A(-4;\ -1)$, $B(2;7)$, $C(-5;6)$, $D(-8;2)$; stabilisci di che tipo di quadrilatero si tratta e calcola il perimetro e l'area. [$2p=27{,}07$; $A=37{,}50$]

16 Rappresenta nel piano cartesiano la circonferenza di centro O passante per il punto $K(-8;15)$; calcola quindi la misura della circonferenza e l'area del cerchio corrispondente. [34π; 289π]

Calcola le coordinate del punto medio M del segmento AB.

17 *Esercizio Guidato*

$A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Indichiamo con x_M e y_M le coordinate del punto medio M del segmento AB ed applichiamo le formule relative:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\dots}{2}=\frac{\frac{4}{2}}{2}=\frac{2}{\dots}=1 \qquad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-\dots+\frac{3}{2}}{2}=\frac{\frac{-1+\dots}{4}}{2}=\frac{\frac{5}{4}}{2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}=\dots$$

Possiamo concludere che le coordinate del punto medio M sono $\left(1;\ \frac{5}{8}\right)$.

18 $A(3;\ -4)$ $\qquad$ $B(-6;\ -2)$. $\qquad$ $\left[\left(-\frac{3}{2};\ -3\right)\right]$

19 $A(-5;-1)$ $\qquad$ $B(-3;5)$. $\qquad$ [$(-4;2)$]

20 $A\left(1;\ \frac{4}{3}\right)$ $\qquad$ $B\left(\frac{3}{4};-2\right)$. $\qquad$ $\left[\left(\frac{7}{8};\ -\frac{1}{3}\right)\right]$

LE FUNZIONI MATEMATICHE

richiami della teoria

- Una **funzione** è una relazione $\mathscr{R}$ da A verso B che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B;
- il **dominio** di una funzione f è l'insieme di elementi di A che sono in corrispondenza con almeno un elemento di B; il **codominio** è l'insieme di elementi di B che sono in relazione con almeno un elemento di A;
- una **funzione matematica** è un tipo di funzione in cui il variare della grandezza y rispetto alla grandezza x avviene sulla base di un meccanismo che può essere espresso mediante una formula matematica;
- una **funzione empirica** è un tipo di funzione che non è esprimibile mediante formule matematiche.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

21 Completa le seguenti definizioni:

a. una funzione è una relazione $\mathscr{R}$ da A verso B che .... ad ogni elemento di A .... elemento di B;

b. si chiama grandezza costante una grandezza i cui valori numerici ....;

c. si chiama grandezza .... una grandezza che può assumere diversi valori numerici;

d. la funzione matematica è un tipo di funzione in cui il variare .... rispetto alla x avviene sulla base di un meccanismo che può essere espresso mediante una ....;

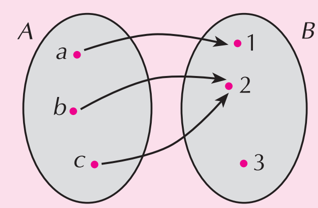
e. le funzioni empiriche sono funzioni che .... mediante ....;

f. due grandezze sono direttamente proporzionali .... è costante.

APPLICAZIONE

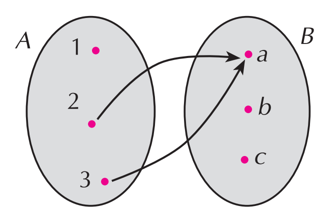
22 *Esercizio Svolto*

Osserva il diagramma a lato che rappresenta una funzione da A in B. Determina il codominio.



L'insieme degli elementi di B che sono in relazione con almeno un elemento di A è formato dagli elementi 1 e 2. Quindi il codominio è $\{1; 2\}$.

23 Osserva il diagramma a lato che rappresenta una funzione da A in B. Determina il dominio e il codominio.



24 *Esercizio Guidato*

Dato l'insieme $A = \{2; \ -3; 5\}$, dominio della funzione $f(x) = 3 \cdot x - 1$, determina il codominio.

Per $x = 2$ $\quad \rightarrow \quad$ il corrispondente valore della y vale: $\quad 3 \cdot ...... - 1 = ... - 1 = 5$

Per $x = -3$ $\rightarrow$ il corrispondente valore della y vale: $3 \cdot (-......) - 1 = ... - 1 = ...$
Per $x = 5$ $\rightarrow$ il corrispondente valore della y vale: $3 \cdot ...... - ...... = ... - ...... = ...$

Il codominio è dato quindi dall'insieme $B = \{5; -10; 14\}$.

25 Dato l'insieme $A = \{-1; 2; 4\}$, dominio della funzione $f(x) = -x + 2$, determina il codominio.

26 *Esercizio Svolto*

Dato l'insieme $A = \left\{\frac{1}{2}; -2; \frac{3}{4}; \frac{7}{5}\right\}$ dominio della funzione $y = 2x + \frac{3}{2}$ calcola il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

Per determinare i valori di y, basta attribuire alla variabile indipendente x la serie di valori numerici con $x \in A$ e ottenere così i corrispondenti valori della variabile dipendente y:

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot (-2) + \frac{3}{2} = -4 + \frac{3}{2} = \frac{-8+3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \frac{7}{5} \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{7}{5} + \frac{3}{2} = \frac{14}{5} + \frac{3}{2} = \frac{28+15}{10} = \frac{43}{10}$$

La tabella richiesta è pertanto:

x	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{5}$
y	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	3	$\frac{43}{10}$

27 Dato l'insieme $A = \left\{\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; 2; -1\right\}$ dominio della funzione $f(x) = -2x + \frac{1}{3}$ calcola il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

28 Dati l'insieme $A = \left\{\frac{1}{2}; 3; \frac{4}{5}; -1\right\}$ dominio della funzione $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$, determina il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

29 Dato l'insieme $A = \left\{1; -\frac{2}{5}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ dominio della funzione $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ calcola il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

30 Dato l'insieme $A = \left\{-\frac{3}{2}; 3; \frac{1}{4}; -2; 7\right\}$ dominio della funzione $y = \frac{1}{2}x + 2$ calcola il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

31 *Esercizio Svolto*

Ricava la funzione matematica relativa alla seguente tabella:

x	-2	-3	-4	-5	-6
y	6	9	12	15	18

I valori della variabile y si ottengono moltiplicando i valori della variabile x per -3; pertanto la funzione matematica relativa è $y = -3x$.

32 Ricava la funzione matematica relativa alla seguente tabella:

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

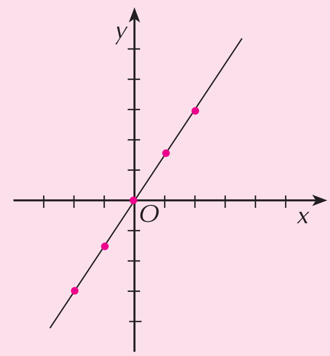
33 ***Esercizio Svolto***

Rappresenta nel piano cartesiano la funzione $y = \frac{3}{2}x$.

Fissiamo alcuni valori per la variabile indipendente x e determiniamo i corrispondenti valori della variabile dipendente y.

x	0	1	2	-2	-1
y	0	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$

Possiamo determinare il grafico della funzione costruendo la retta che passa per i punti evidenziati.



34 Rappresenta nel piano cartesiano la funzione matematica $y = -\frac{1}{3}x$.

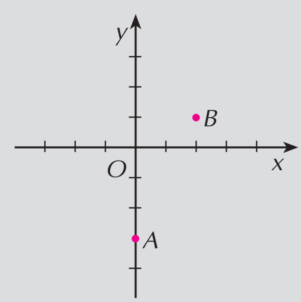
35 ***Esercizio Guidato***

Rappresenta nel piano cartesiano la funzione matematica $y = 2x - 3$.

Determiniamo i valori della variabile dipendente y dopo aver fissato quelli della variabile indipendente x.

x	0	3	2	-1	1
y	-3	.....	1	.....	.....

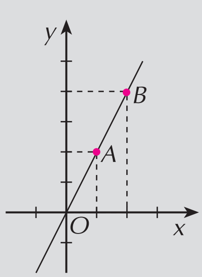
Riporta sul piano cartesiano a lato i punti trovati e uniscili in modo da formare una ....



36 Rappresenta nel piano cartesiano la funzione matematica $y = -x + 2$.

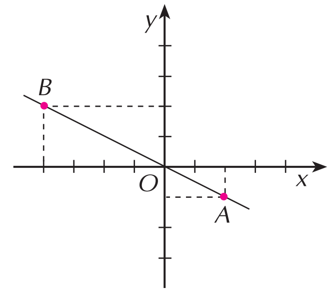
37 ***Esercizio Guidato***

Dopo aver ricavato i valori di x e di y dal seguente diagramma cartesiano, individua la funzione matematica che esso rappresenta.



In base all'unità di misura del grafico, determiniamo i valori della variabile x e della variabile y, in corrispondenza di alcuni punti.
Otteniamo così alcune coppie di valori della funzione cercata: $A(1; .....)$; $B(.....; .....)$.
Analizzando tali coppie rileviamo che in tutti i casi i valori della y sono il .... del corrispondente valore della x.
Pertanto la funzione matematica rappresentata dal grafico è $y = ...x$.

38 Dopo aver ricavato i valori di x e di y dal seguente diagramma cartesiano, individua la funzione matematica che esso rappresenta.



39 Siano dati gli insiemi $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ e $B = \{-4; -8; -12; -16; -20\}$. Individua una possibile relazione $\mathscr{R}$ da A in B tra gli elementi dei due insiemi facendo in modo di ottenere una funzione. Determina, inoltre, la formula matematica che lega le due variabili x e y e rappresenta la funzione con un diagramma cartesiano. $[y = -4x]$

LA PROPORZIONALITÀ DIRETTA

richiami della teoria

- Due grandezze si dicono **direttamente proporzionali** se raddoppiando, triplicando, dimezzando ... l'una, raddoppia, triplica, si dimezza .... anche l'altra;
- due grandezze x e y direttamente proporzionali hanno **rapporto costante:** $\frac{y}{x} = m$;
- la legge di **proporzionalità diretta** è rappresentata nel piano cartesiano da una **retta** passante per l'origine;
- ogni funzione del tipo $y = mx$ rappresenta l'equazione della retta passante per l'origine; in essa m viene denominato **coefficiente angolare** e individua l'inclinazione o pendenza della retta rispetto all'asse x:
  a. se $m > 0$ le rette del fascio appartengono al 1° e 3° quadrante;
  b. se $m < 0$ le rette del fascio appartengono al 2° e 4° quadrante;
  c. se $m = 1$ la retta è bisettrice del 1° e 3° quadrante;
  d. se $m = -1$ la retta è bisettrice del 2° e del 4° quadrante.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

40 Con quale tipo di grafico si rappresenta una proporzionalità diretta nel piano cartesiano?

41 Cosa rappresenta m nell'equazione di una retta espressa nella forma $y = mx$?

42 Completa la seguente proprietà.
La funzione $y = mx$ rappresenta un fascio di rette passanti per l'origine; in particolare:
a. se $m < 0$ le rette appartengono al ....;
b. se $m > 0$ le rette appartengono al ....;
c. se $m = 1$ la retta è la ....;
d. se $m = -1$ la retta è la ....

43 Tanto più è alto il valore del coefficiente angolare m, tanto più l'inclinazione della retta tende a formare un angolo di:
a. 45° rispetto al semiasse positivo delle ascisse;
b. 180° rispetto al semiasse positivo delle ascisse;
c. 90° rispetto al semiasse positivo delle ascisse.

APPLICAZIONE

44 *Esercizio Svolto*

Calcola il coefficiente di proporzionalità diretta corrispondente alla coppia di valori x, y della seguente tabella:

x	2	3	6
y	$\frac{2}{3}$	1	2

Il coefficiente di proporzionalità diretta è dato dal rapporto $\frac{y}{x} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, quindi tale rapporto vale $\frac{1}{3}$.

45 Calcola il coefficiente di proporzionalità diretta corrispondente alla coppia di valori x, y della seguente tabella:

x	1	$\frac{1}{2}$	6
y	2	1	12

46 Dato il coefficiente di proporzionalità diretta $k = \frac{1}{2}$ completa la seguente tabella; determina la funzione matematica di proporzionalità e rappresentala graficamente in un piano cartesiano.

x	2	4	-1	-2
y				

LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

richiami della teoria

- Ogni funzione del tipo $\boldsymbol{y = mx + q}$, con m e q costanti, è rappresentata nel piano cartesiano da una retta; in essa m è il coefficiente angolare e q è l'**ordinata all'origine**;
- $\boldsymbol{y = k}$ (con k costante) è l'equazione di una retta parallela all'asse delle x;
- $\boldsymbol{x = h}$ (con h costante) è l'equazione di una retta parallela all'asse delle y;
- due rette **parallele** hanno lo stesso coefficiente angolare $\boldsymbol{m = m'}$;
- due rette sono **perpendicolari** se il coefficiente angolare della prima è l'opposto e il reciproco del coefficiente dell'altro: $\boldsymbol{m = -\dfrac{1}{m'}}$;
- le **coordinate dei punti di intersezione di una retta**, di equazione $y = mx + q$, rispettivamente con gli **assi x** e **y**, si ottengono ponendo in essa $y = 0$ e $x = 0$ e calcolando i valori corrispondenti dell'ascissa e dell'ordinata;
- l'equazione di una retta passante per due punti di coordinate note è: $\boldsymbol{\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$;
- l'equazione di una retta passante per un punto P e di coefficiente angolare m è $\boldsymbol{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

47 Completa le seguenti proprietà:

a. l'equazione $y = mx + q$ rappresenta ....;

b. l'equazione $y = k$ rappresenta una retta ....;

c. l'equazione $x = h$ rappresenta una retta ....

48 Due rette parallele:

a. hanno lo stesso coefficiente angolare;

b. hanno coefficienti angolari opposti e reciproci;

c. hanno coefficienti angolari opposti.

49 Qual è la formula che permette di determinare l'equazione di una retta passante per due punti di coordinate note:

a. $\dfrac{y_1 - y}{y_1 + y_2} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$; **b.** $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$; **c.** $\dfrac{y + y_1}{y_2 + y_1} = \dfrac{x + x_1}{x_2 + x_1}$.

50 Qual è la formula che permette di determinare l'equazione di una retta passante per un punto P e di coefficiente angolare m:

a. $y - y_0 = m \cdot (x_0 - x)$; **b.** $y - y_0 = m : (x - x_0)$; **c.** $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

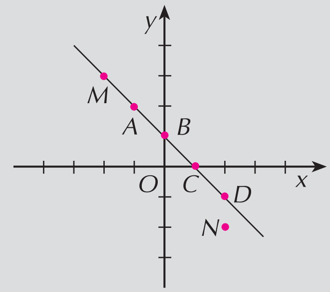
APPLICAZIONE

51 *Esercizio Guidato*

Verifica graficamente e algebricamente se i punti $M(-2; 3)$ e $N(2; -2)$ appartengono alla retta di equazione $y = -x + 1$.

Verifica grafica

Attribuiamo alla x valori appartenenti all'insieme Z compresi tra -2 e $+2$, calcoliamo i valori corrispondenti della y e costruiamo il relativo grafico.



- per $x = -2$ $\quad y = -(-2) + 1 = 2 + 1 = 3$ $\quad M(-2; 3)$
- per $x = -1$ $\quad y = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$ $\quad A(-1; 2)$
- per $x = 0$ $\quad y = -(...) + 1 = ... + 1 = 1$ $\quad B(0; 1)$
- per $x = 1$ $\quad y = -(...) + ... = ... + 1 = 0$ $\quad C(1; 0)$
- per $x = 2$ $\quad y = -(...) + ... = -... + ... = -...$ $\quad D(2; -1)$

Come possiamo notare, il punto $M(-2; 3)$ appartiene alla retta $y = -x + 1$; il punto $N(2; -2)$ .... a quest'ultima.

Verifica algebrica

Se nell'equazione $y = -x + 1$, sostituiamo, alla x ed alla y rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto $M(-2; 3)$, otteniamo: $3 = -(-2) + 1 \quad \rightarrow \quad 3 = 3$

Poiché le coordinate del punto M soddisfano l'equazione, possiamo affermare che esso .... alla retta $y = -x + 1$.

Ripetendo lo stesso procedimento per il punto $N(2; -2)$, otteniamo:

.... $= -2 + 1 \quad \rightarrow \quad -2 \neq -1$

e quindi il punto .... non appartiene alla retta $y = -x + 1$.

52 Verifica graficamente e algebricamente se i punti $M(3; 2)$ e $N(-3; 2)$ appartengono alla retta r di equazione $y = -\dfrac{2}{3}x$.

53 Verifica graficamente e algebricamente se il punto $P(2; 1)$ appartiene alla retta $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$.

54 *Esercizio Guidato*

Determina algebricamente le coordinate del punto di intersezione P delle rette di equazione r: $y = -x + 4$ e $s: y = 2x + 1$.

Dopo aver verificato che le due rette r e s non sono parallele ($m_1 = -1$ e $m_2 = 2$) mettiamo in relazione di uguaglianza i due secondi membri delle equazioni delle rette e calcoliamo il valore della x:

$-x + 4 = 2x + 1 \quad \rightarrow \quad -x - 2x = +1 - 4 \quad \rightarrow \quad -3x = ... \quad \rightarrow \quad 3x = ... \quad \rightarrow \quad x = 1.$

Sostituiamo ora il valore $x = 1$ in una delle due equazioni delle rette e calcoliamo così il valore della y:

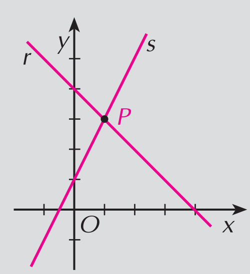
$y = -x + 4 \qquad y = -1 + 4 \qquad y = ...$

Quindi il punto di intersezione P delle rette r e s ha come ascissa e ordinata rispettivamente 1 e 3, $P(.....; .....)$.

Notiamo che, sostituendo il valore $x = 1$ nell'equazione $y = 2x + 1$, avremmo ancora ottenuto lo stesso risultato, infatti:

$y = 2x + 1 \qquad y = 2 \cdot 1 + 1 \qquad y = 3.$

Per comprendere meglio il risultato abbiamo inoltre rappresentato nel piano le due rette.



55 Determina algebricamente le coordinate del punto di intersezione P delle rette di equazione $r: y = 3x + 4$ e $s: y = 2x - 3$. [(−7; −17)]

56 Determina, senza rappresentazione grafica, il punto in cui la retta $y = -\frac{3}{2}x + 4$ interseca l'asse y. $[(0; 4)]$

57 Determina graficamente ed algebricamente il punto di intersezione tra le rette r e s di equazione rispettivamente $y = 2x - 3$ e $y = -x + 3$. $[(2; 1)]$

58 *Esercizio Svolto*

Trova l'equazione della retta di coefficiente angolare $m = +3$ passante per il punto $A(2; -1)$.

La formula che consente di trovare l'equazione è $y - y_0 = m(x - x_0)$ dove m è il coefficiente angolare e x_0 e y_0 sono le coordinate del punto. Quindi avremo:

$y + 1 = +3(x - 2) \quad \rightarrow \quad y + 1 = 3x - 6 \quad \rightarrow \quad y = 3x - 6 - 1 \quad \rightarrow \quad y = 3x - 7$

59 Determina l'equazione della retta passante per il punto $A(-3; -2)$ di coefficiente angolare $m = -1$. $[y = -x - 5]$

60 Trova l'equazione della retta di coefficiente angolare $m = +\frac{3}{2}$ passante per il punto $A(1; -3)$. $\left[y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\right]$

61 Trova l'equazione della retta di coefficiente angolare $m = -\frac{1}{3}$ passante per il punto $A(3; -1)$. $\left[y = -\frac{1}{3}x\right]$

62 Scrivi l'equazione della retta parallela alla retta di equazione $y = 2x - 1$ e passante per $P(-1; 2)$. $[y = 2x + 4]$

63 Scrivi l'equazione della retta perpendicolare alla retta di equazione $y = \frac{2}{3}x + 1$ e passante per $P\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. $\left[y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{4}\right]$

64 *Esercizio Svolto*

Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A(-2; 1)$ e $B(-3; -4)$.

Basta sostituire nell'equazione $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ le coordinate dei punti A e B:

$$\frac{y-1}{-4-1} = \frac{x+2}{-3+2} \quad \rightarrow \quad \frac{y-1}{-5} = \frac{x+2}{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{y-1}{-5} = \frac{5x+10}{-5} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y - 1 = 5x + 10 \quad \rightarrow \quad y = 5x + 10 + 1 \quad \rightarrow \quad y = 5x + 11$$

65 Scrivi l'equazione della retta che passa per l'origine e per il punto $A(-5; 2)$. $\left[y = -\frac{2}{5}x\right]$

66 Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A(-3; 1)$ e $B(2; -2)$. $\left[y = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}\right]$

67 Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A(4; 1)$ e $B(1; 2)$. $\left[y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}\right]$

68 Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. $\left[y = x + \frac{1}{2}\right]$

69 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $A(3; -2)$ e $B\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. $\left[y = -\frac{12}{5}x + \frac{26}{5}\right]$

LA FUNZIONE DI PROPORZIONALITÀ INVERSA O QUADRATICA

richiami della teoria

- Due grandezze si dicono **inversamente proporzionali** se raddoppiando, triplicando, dimezzando ..... l'una, si dimezza, diventa un terzo, si raddoppia ..... l'altra;
- due grandezze x e y inversamente proporzionali hanno il **prodotto costante:** $\boldsymbol{y \cdot x = k}$;
- la legge di **proporzionalità inversa** è rappresentata nel piano cartesiano da una **iperbole equilatera**;
- due grandezze x e y sono in **proporzionalità quadratica** quando la relazione che le lega è del tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$;
- la **parabola** è l'insieme dei punti del piano descritti dall'equazione $\boldsymbol{y = ax^2}$ con a costante diversa da zero; la parabola passa per l'origine degli assi ed ha come asse di simmetria la retta $x = 0$.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

70 Completa la seguente definizione:
due grandezze si dicono inversamente proporzionali se raddoppiando, triplicando, dimezzando ..... l'una, ... l'altra.

71 Due grandezze sono inversamente proporzionali se:
a. il loro rapporto è costante;
b. il loro prodotto è costante;
c. la loro somma è costante.

72 Da quale curva è rappresentata nel piano cartesiano la legge della proporzionalità inversa?

73 Completa la seguente definizione:
due grandezze x e y sono in proporzionalità quadratica quando la relazione che le lega si può esprimere con una formula del tipo ....

74 Completa la seguente definizione:
una funzione del tipo $y = ax^2$ (con $a \neq 0$) è l'equazione di una .... avente come asse di simmetria .... e come vertice ....; in particolare:
- se $a > 0$ la concavità della curva è ....;
- se $a < 0$ la concavità della curva è ....

APPLICAZIONE

75 *Esercizio Svolto*

Calcola il coefficiente di proporzionalità inversa corrispondente alla coppia di valori x, y della seguente tabella:

x	3	1	-3
y	5	15	-5

Il coefficiente di proporzionalità inversa è dato dal prodotto $x \cdot y = 3 \cdot 5 = 1 \cdot 15 = (-3) \cdot (-5)$, quindi tale coefficiente vale 15.

76 Calcola il coefficiente di proporzionalità inversa corrispondente alla coppia di valori x, y della seguente tabella:

x	$\frac{1}{3}$	1	-4
y	6	2	$-0{,}5$

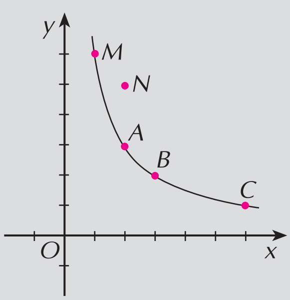
77 Dato il coefficiente di proporzionalità inversa $k = 8$ completa la seguente tabella; determina la funzione matematica di proporzionalità e rappresentala graficamente in un piano cartesiano.

x	1	2	4	8
y				

78 *Esercizio Guidato*

Verifica graficamente e algebricamente se i punti $M(1; 6)$ e $N(2; 5)$ appartengono all'iperbole equilatera $y = \frac{6}{x}$.

Verifica grafica



Attribuiamo alla x dei valori numerici positivi, calcoliamo i corrispondenti valori della y e costruiamo il grafico:

- per $x = 1$ $\rightarrow$ $y =$ ...... $\rightarrow$ $M(1;$ ......$)$
- per $x = 2$ $\rightarrow$ $y =$ ...... $\rightarrow$ $A($......; ......$)$
- per $x = 3$ $\rightarrow$ $y =$ ...... $\rightarrow$ $B(3;$ ......$)$
- per $x = 6$ $\rightarrow$ $y =$ ...... $\rightarrow$ $C($......; ......$)$

Dal grafico si capisce che il punto $M(1;$ .....$)$ .... all'iperbole; mentre il punto $N(2; 5)$ .... a quest'ultima.

Verifica algebrica

Se nella funzione $y = \frac{6}{x}$ sostituiamo alla x e alla y rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto M, otteniamo:

$$y = \frac{6}{x} \quad \rightarrow \quad 6 = \frac{6}{1} \quad \rightarrow \quad 6 = 6.$$

Le coordinate di M soddisfano la funzione, possiamo affermare quindi che il punto M .... all'iperbole. Ripetendo lo stesso procedimento per il punto N, otteniamo $5 = \frac{6}{2}$: cioè il punto

79 Verifica graficamente e algebricamente se i punti $B(2; 4)$ e $F(4; 5)$ appartengono all'iperbole equilatera $y = \frac{8}{x}$.

80 Dati i punti del piano $A(1; 2)$ e $B(3; 6)$ verifica algebricamente se i punti A e B appartengono alla parabola $y = \frac{2}{3}x^2$.

81 Determina graficamente i punti di intersezione della parabola di equazione $y = 2x^2$ con la retta di equazione $y = 2x$. [$O(0; 0)$; $A(1; 2)$]