Approfondimento

I grafici derivati

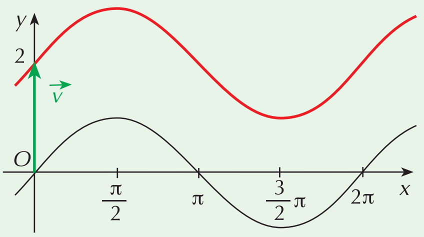
A partire dai grafici delle funzioni goniometriche fondamentali possiamo costruire quelli di altre funzioni applicando opportune isometrie. Di seguito vediamo alcuni esempi.

I esempio.

Rappresentiamo il grafico di $y = \sin x + 2$.

Questa funzione è la corrispondente di $y = \sin x$ nella traslazione di vettore $\vec{v} = (0,\ 2)$.

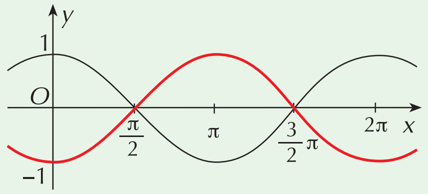
Per ottenere il suo grafico basta "spostare" di 2 unità verso l'alto quello della funzione base $y = \sin x$.



II esempio.

Costruiamo il grafico della funzione di equazione $y = -\cos x$.

Il grafico di questa funzione si ottiene dalla funzione base $y = \cos x$ (in nero in figura) mediante una simmetria rispetto all'asse x (grafico in rosso).



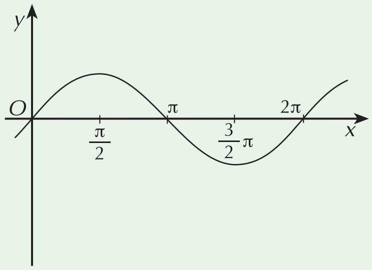
III esempio.

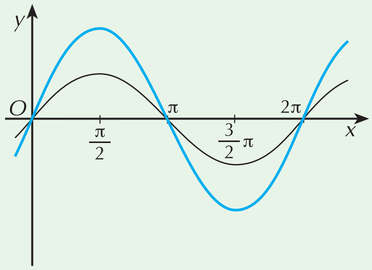
Rappresentiamo il grafico di $y = 2\sin x - 1$.

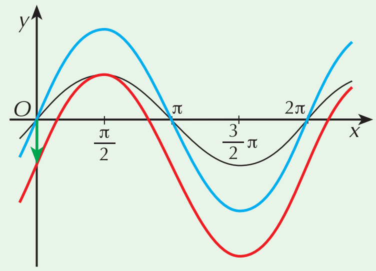
Disegniamo la funzione base $y = \sin x$ (in nero nella prima figura).

La funzione $y = 2\sin x$ si ottiene raddoppiando il valore delle ordinate (in blu nella seconda figura).

Da ultimo dobbiamo applicare la traslazione di vettore $\vec{v} = (0,\ -1)$ (in rosso nella terza figura).







Osserviamo che nel passaggio da $y = \sin x$ a $y = 2\sin x$ è stata applicata una trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$$

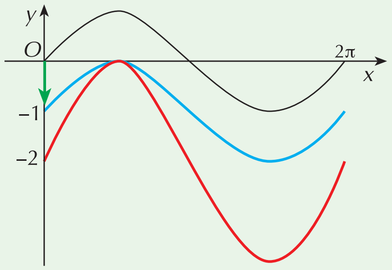
Una trasformazione che ha equazione $\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$

è detta dilatazione di fattore h lungo l'asse x e di fattore k lungo l'asse delle y.

La funzione $y = 2\sin x - 1$ si ottiene quindi applicando le seguenti trasformazioni:

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

- dilatazione di fattore 2 lungo l'asse delle ordinate per avere 2 sin x; in pratica basta raddoppiare le ordinate del grafico base (grafico in blu di pagina precedente)
- traslazione di vettore $\vec{v} = (0, -1)$ sul grafico precedente per avere 2 sin $x - 1$ (grafico in rosso di pagina precedente).



Attenzione all'ordine di applicazione delle trasformazioni (segui la figura a fianco): se sulla curva base (grafico in nero) si esegue prima la traslazione di vettore $\vec{v} = (0, -1)$ (grafico in azzurro) quindi la dilatazione lungo le ordinate di fattore 2 (curva in rosso), si ottiene un grafico diverso che non corrisponde a quello richiesto ma a quello della funzione $y = 2(\sin x - 1)$.

Per individuare l'esatto ordine di applicazione delle diverse trasformazioni devi seguire l'ordine delle operazioni; nel caso della nostra funzione: dato x, prima si calcola sin x (funzione base), poi si calcola 2 sin x (dilatazione di fattore 2), poi si calcola 2 sin $x - 1$ (traslazione di vettore $\vec{v} = (0, -1)$).

Esercizi

1 Se alla funzione $y = \cos x$ applichiamo una traslazione di vettore $\vec{v} = (1, 0)$ otteniamo la funzione di equazione:

a. $y = \cos x + 1$ **b.** $y = \cos(x + 1)$ **c.** $y = \cos(x - 1)$ **d.** $y = \cos x - 1$

2 Indica quali traslazioni occorre applicare per costruire il grafico delle seguenti funzioni a partire dalle funzioni goniometriche fondamentali:

a. $y = \sin x - 2$ **b.** $y - 4 = \cos x$ **c.** $y = \sin(x - 2)$ **d.** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

N.B.: Puoi controllare con GeoGebra di aver costruito correttamente i grafici richiesti.

Mediante l'applicazione di opportune traslazioni, costruisci i grafici delle seguenti funzioni.

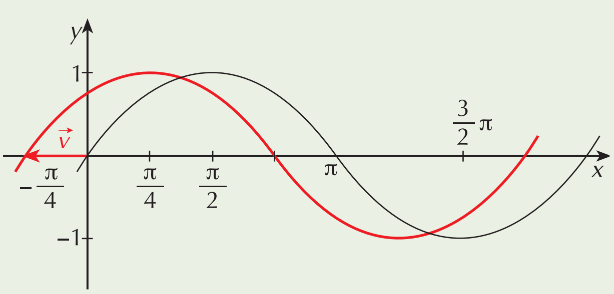
3 $y = \sin x - 1$ **4** $y = \cos x + 2$

5 $y - 3 = \sin x$ **6** $y + 1 = \cos x$

7 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Il grafico di questa funzione si ottiene da quello della funzione base $y = \sin x$ (in nero nella figura) mediante l'applicazione della traslazione di vettore $\vec{v} = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.



8 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **9** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

10 $y = \tan x - 1$

11 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

12 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

13 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

14 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

15 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$

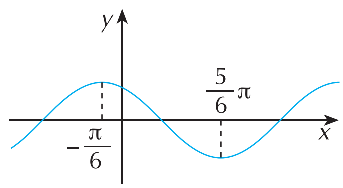
16 $y = 3 + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

17 $y = \frac{1}{2} + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

18 Il grafico in figura rappresenta la funzione:

a. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ **b.** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ **d.** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$



Mediante l'applicazione di opportune simmetrie, costruisci i grafici delle seguenti funzioni.

19 $y = -\sin x$

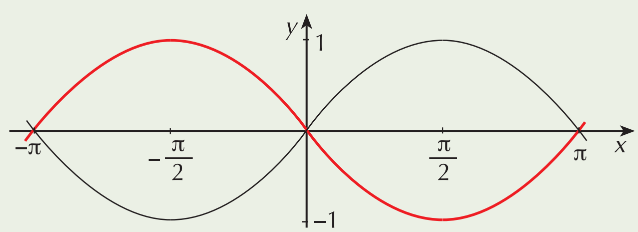
20 $y = -\tan x$

21 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = \sin(-x)$

La funzione $y = \sin(-x)$ (funzione trasformata) si ottiene dalla $y = \sin x$ (funzione di base) con le sostituzioni $\begin{cases} x \to -x \\ y \to y \end{cases}$.

Si tratta, pertanto, di una simmetria rispetto all'asse y.



22 $y = \cos(-x)$

23 $y = \tan(-x)$

24 $y = -\sin(-x)$

25 $y = -\cos(-x)$

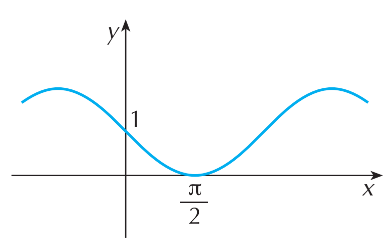
26 $y = \sin(-x) + \frac{1}{3}$

27 $y = -\tan(-x) + \frac{1}{2}$

28 Il grafico in figura rappresenta la funzione

a. $y = 1 - \cos x$ **b.** $y = 1 - \sin x$

c. $y = \sin x + 1$ **d.** $y = 1 + \cos x$



Risultati di alcuni esercizi.

1 **c.** **2** **a.** $\vec{v} = (0, -2)$; **b.** $\vec{v} = (0, 4)$; **c.** $\vec{v} = (2, 0)$; **d.** $\vec{v} = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ **18** **d.** **28** **b.**

© Istituto Italiano Edizioni Atlas