

APPROFONDIMENTO

L'angolo tra due rette nel piano cartesiano

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, consideriamo le rette r e s di equazioni

$$y = mx + q \quad \text{e} \quad y = m'x + q'$$

Esse, intersecandosi, formano due angoli che sono fra loro supplementari. Indicando con γ quello acuto (**figura 1**), ci chiediamo se esiste una relazione fra γ ed i coefficienti angolari m e m' delle due rette. Indichiamo allora con α l'angolo che la retta r forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse e con β quello che la retta s forma con lo stesso asse e supponiamo che sia $\alpha > \beta$. Le due rette e l'asse delle ascisse individuano un triangolo di cui α è un angolo esterno; possiamo quindi dire che, essendo $\alpha = \beta + \gamma$ per il teorema dell'angolo esterno, allora $\gamma = \alpha - \beta$.

Grazie alle formule che ci consentono di determinare le funzioni goniometriche della differenza degli angoli possiamo calcolare la tangente di γ :

$$\tan \gamma = \tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

tenendo poi presente che è $\tan \alpha = m$ e $\tan \beta = m'$, la relazione diventa

$$\tan \gamma = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

Se invece è $\alpha < \beta$ (**figura 2**), allora $\gamma = \beta - \alpha$ e la tangente dell'angolo γ è data dalla relazione

$$\tan \gamma = \tan (\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

In ogni caso, allora, la tangente dell'angolo acuto che le due rette formano intersecandosi è data dalla relazione

$$\tan \gamma = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

Ad esempio, considerate le rette di equazioni $y = 2x - 1$ e $y = -x + 3$ (**figura 3**) di coefficienti angolari rispettivamente 2 e -1 , l'angolo acuto γ da esse formato è tale che

$$\tan \gamma = \left| \frac{2 + 1}{1 - 2} \right| = 3. \quad \text{Un valore approssimato di } \gamma \text{ è } 71^\circ 33' 54''.$$

Figura 1

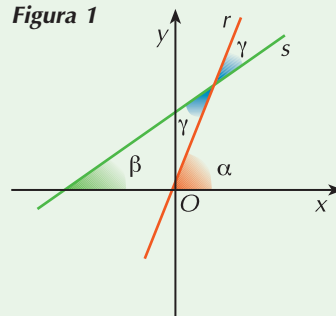


Figura 2

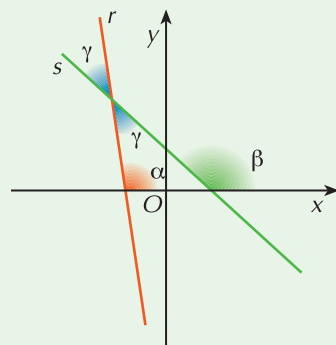
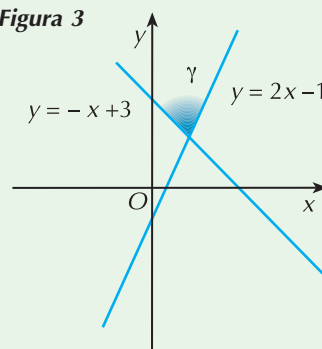


Figura 3



ESERCIZI

Calcola l'ampiezza degli angoli formati dalle seguenti coppie di rette.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$r: 8x - 2y + 1 = 0 \quad r': 3x - 5y = 0$$

Il coefficiente angolare della retta r è: $m = 4$

Il coefficiente angolare della retta s è: $m' = \frac{3}{5}$

Poiché le due rette non sono parallele, incontrandosi formano un angolo acuto γ tale che

$$\tan \gamma = \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right|$$

Applicando la formula otteniamo: $\tan \gamma = \left| \frac{4 - \frac{3}{5}}{1 + 4 \cdot \frac{3}{5}} \right| = 1 \quad \rightarrow \quad \gamma = 45^\circ$

Gli angoli formati dalle due rette sono quindi di 45° e 135° .

2	$r: x - y = 0$	$r': (\sqrt{3} - 2)x - y - 3 = 0$	$[\gamma = 60^\circ \text{ e } \gamma' = 120^\circ]$
3	$r: y = x - 1$	$r': (2 - \sqrt{3})x - y - 1 = 0$	$[\gamma = 30^\circ \text{ e } \gamma' = 150^\circ]$
4	$r: 3x - 4y = 0$	$r': 4x + 3y - 5 = 0$	[le rette sono perpendicolari; $\tan \gamma$ non esiste]
5	$r: 2x - y + 3 = 0$	$r': x + y - 1 = 0$	$[\tan \gamma = 3, \gamma \approx 71^\circ 33' 54'', \gamma' \approx 108^\circ 26' 6'']$
6	$r: 3x - 4y + 1 = 0$	$r': 2x + 3y - 5 = 0$	$\left[\tan \gamma = \frac{17}{6}, \gamma \approx 70^\circ 33' 36'', \gamma' \approx 109^\circ 26' 24'' \right]$
7	$r: x - y = 0$	$r': (2 + \sqrt{3})x + y = 0$	$[\gamma = 60^\circ \text{ e } \gamma' = 120^\circ]$
8	$r: 3x + 4y - 1 = 0$	$r': 6x + 8y + 3 = 0$	$[\tan \gamma = 0, \text{ le rette sono}]$
9	$r: 3x - 4y - 1 = 0$	$r': x + y + 3 = 0$	$[\tan \gamma = 7, \gamma \cong 81^\circ 52' 12'', \gamma' \cong 98^\circ 7' 48'']$
10	$r: y = x + 2$	$r': (2 + \sqrt{3})x - y = 0$	$[\gamma = 30^\circ \text{ e } \gamma' = 150^\circ]$
11	$r: 1 + 2x - y = 0$	$r': 3 + x + 2y = 0$	[le rette sono perpendicolari; $\tan \gamma$ non esiste]