Approfondimento

Le dimostrazioni delle proprietà dei poligoni simili

I poligoni simili godono delle seguenti proprietà:

- il rapporto fra i perimetri di due poligoni simili è uguale a quello di due lati omologhi.
  Infatti, se due poligoni sono simili i loro lati sono in proporzione, cioè, riferendoci alla ***figura 1***,

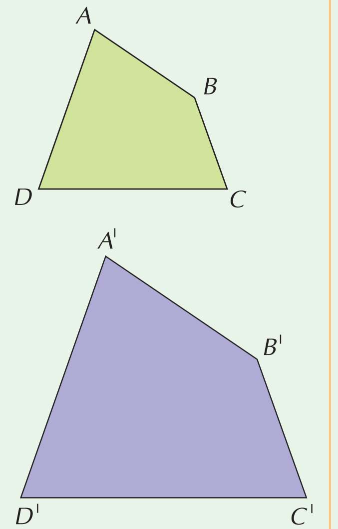
  $$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'$$

  Applicando la proprietà del comporre a questa serie di proporzioni otteniamo che

  $$(AB + BC + CD + DA) : (A'B' + B'C' + C'D' + D'A') = AB : A'B'$$

  cioè $\quad 2p : 2p' = AB : A'B'$

Figura 1



- I perimetri di due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono proporzionali ai raggi delle circonferenze ad essi circoscritte.
  Infatti, se due poligoni sono simili, i loro perimetri sono proporzionali a due lati omologhi, cioè (***figura 2***)

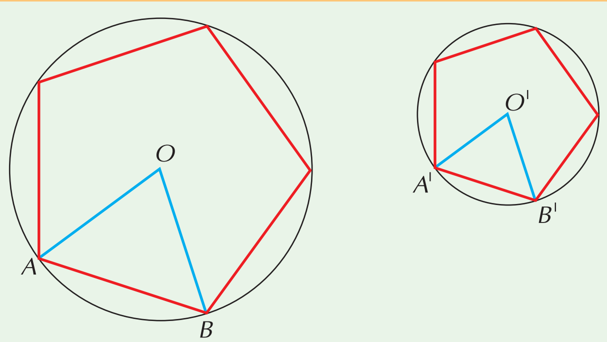
  $$2p : 2p' = AB : A'B'$$

  D'altra parte, se tracciamo i raggi OA e OB e i loro corrispondenti $O'A'$ e $O'B'$, i triangoli OAB e $O'A'B'$ sono simili perché hanno due angoli ordinatamente congruenti (gli angoli OAB, OBA, $O'A'B'$ e $O'B'A'$ sono tutti congruenti fra loro), quindi

  $$AB : A'B' = OA : O'A'$$

  Dal confronto fra le due proporzioni ricaviamo che $\quad 2p : 2p' = OA : O'A'$

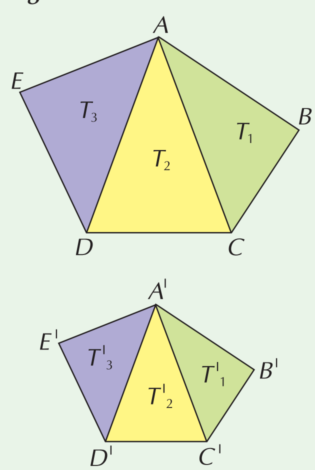
Figura 2



- Se da due vertici omologhi di due poligoni simili si tracciano le diagonali, i due poligoni rimangono divisi in triangoli simili (***figura 3***).
  Infatti, dalla proporzionalità fra i segmenti omologhi dei due poligoni e dalla congruenza fra gli angoli omologhi, si deduce che:

  $T_1 \sim T'_1$ per avere due lati proporzionali ($AB : A'B' = BC : B'C'$) e gli angoli fra essi compresi congruenti ($\widehat{B} \cong \widehat{B}'$)

Figura 3



$T_3 \sim T'_3$ per lo stesso motivo ($AE : A'E' = ED : E'D'$ e $\widehat{E} \cong \widehat{E}'$)

$T_2 \sim T'_2$ perché la similitudine dei precedenti triangoli implica che $AD : A'D' = AC : A'C' = DC : D'C'$.

- In poligoni simili il rapporto fra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.
Infatti, se da due vertici corrispondenti dei due poligoni P e P' tracciamo le diagonali (puoi riferirti ancora alla ***figura 3***), il rapporto fra le aree dei triangoli che si vengono a formare è uguale al quadrato del rapporto di similitudine perché i triangoli sono simili, cioè, indicando con k tale rapporto,

$$\frac{\text{area }(T_1)}{\text{area }(T'_1)} = \frac{\text{area }(T_2)}{\text{area }(T'_2)} = \frac{\text{area }(T_3)}{\text{area }(T'_3)} = k^2$$

Applicando la proprietà del comporre otteniamo allora che

$$\frac{\text{area }(T_1 + T_2 + T_3)}{\text{area }(T'_1 + T'_2 + T'_3)} = k^2 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\text{area }(P)}{\text{area }(P')} = k^2$$