

# APPROFONDIMENTO

## Le disequazioni lineari in due variabili

Una disequazione lineare nelle due variabili  $x$  e  $y$  si presenta nella forma  $ax + by + c > 0$  o in quella analoga con il verso opposto.

Consideriamo per esempio la disequazione:  $x + 2y - 4 > 0$

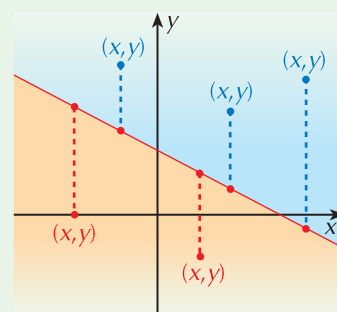
e, come prima cosa, esplicitiamo rispetto a  $y$ :  $y > -\frac{1}{2}x + 2$

Consideriamo adesso la retta ad essa associata:  $y = -\frac{1}{2}x + 2$

e rappresentiamola nel piano cartesiano; il piano resta in questo modo diviso in due semipiani (**figura 1**) i cui punti hanno queste caratteristiche:

- tutti i punti che appartengono alla regione colorata in blu hanno un'ordinata che è maggiore di quella del punto della retta che ha la stessa ascissa, sono cioè i punti per i quali la  $y$  è maggiore di  $-\frac{1}{2}x + 2$ ;
- tutti i punti che appartengono alla regione colorata in giallo hanno un'ordinata che è minore di quella del punto della retta che ha la stessa ascissa, sono cioè i punti per i quali la  $y$  è minore di  $-\frac{1}{2}x + 2$ .

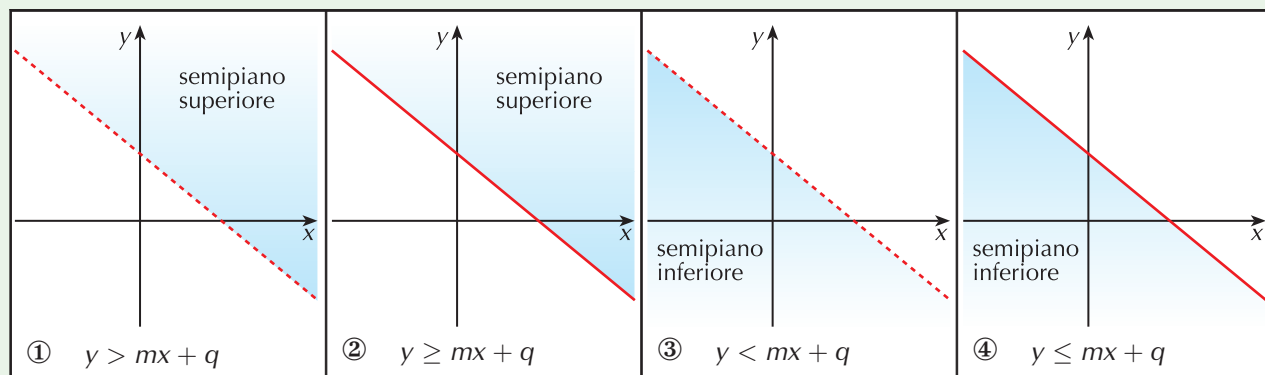
Figura 1



Allora l'insieme delle soluzioni della disequazione è costituito dai punti del semipiano blu, esclusi i punti della retta stessa.

In generale, una volta esplicitata la disequazione rispetto alla variabile  $y$  e rappresentata nel piano cartesiano la retta ad essa associata, le soluzioni sono rappresentate (osserva le immagini corrispondenti più sotto):

- ① dai punti del semipiano superiore delimitato dalla retta  $r$ , senza i punti di  $r$ , se il verso della disequazione è " $>$ ";
- ② dai punti del semipiano superiore delimitato dalla retta  $r$ , con i punti di  $r$ , se il verso della disequazione è " $\geq$ ";
- ③ dai punti del semipiano inferiore delimitato dalla retta  $r$ , senza i punti di  $r$ , se il verso della disequazione è " $<$ ";
- ④ dai punti del semipiano inferiore delimitato dalla retta  $r$ , con i punti di  $r$ , se il verso della disequazione è " $\leq$ ".



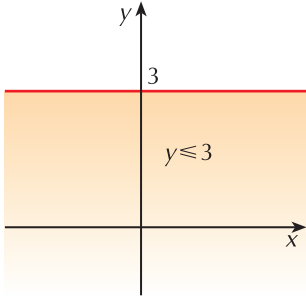
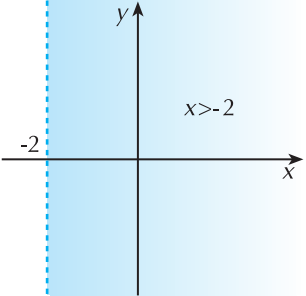
Come indicato anche nelle figure, si è soliti disegnare la retta  $r$  a tratto continuo per indicare che i suoi punti appartengono alla regione delle soluzioni, tratteggiata quando non ne fanno parte.

Valutazioni analoghe valgono anche per disequazioni della forma:

$$y > k \quad \text{e} \quad x > h$$

che consideriamo di due variabili con il coefficiente di  $x$  o di  $y$  che è nullo.

Poiché le rette  $y = k$  e  $x = h$  sono parallele rispettivamente all'asse  $x$  e all'asse  $y$ , l'insieme delle soluzioni è ancora costituito dai punti di un semipiano.

	
<p>soluzioni della disequazione <math>y \leq 3</math>: semipiano inferiore della retta <math>y = 3</math> compresi i punti della retta</p>	<p>soluzioni della disequazione <math>x &gt; -2</math>: semipiano a destra della retta <math>x = -2</math> esclusi i punti della retta</p>

### Un metodo alternativo

Per scegliere il semipiano che rappresenta le soluzioni si può anche procedere in un altro modo. Una volta disegnata la retta:

- si sceglie un punto qualunque (non sulla retta) che appartiene a uno dei due semipiani da essa delimitati
- si sostituiscono le sue coordinate nella disequazione
- se la relazione trovata è vera, la regione delle soluzioni è quella a cui appartiene il punto
- se la relazione trovata è falsa, la regione delle soluzioni è quella opposta a quella a cui appartiene il punto.

### Esempio.

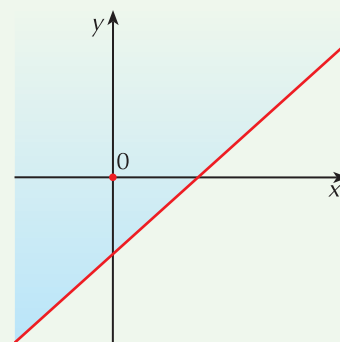
Rappresentiamo le soluzioni della disequazione:  $3x - 4y - 6 \leq 0$

Disegniamo la retta associata alla disequazione:  $3x + 4y - 6 = 0$

Prendiamo un punto in uno dei due semipiani delimitati dalla retta, per esempio l'origine, e sostituiamo le sue coordinate nella disequazione; otteniamo

$$-6 \leq 0$$

che è una relazione vera. L'insieme delle soluzioni è il semipiano che contiene questo punto.



## 1 ESERCIZIO GUIDATO

$$y - 2x \leq 3$$

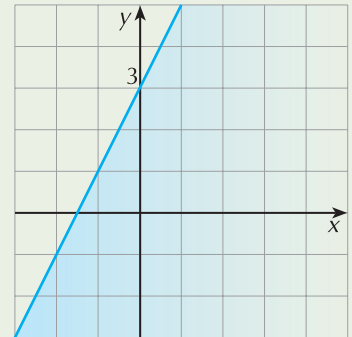
Esplicitiamo la disequazione rispetto alla variabile  $y$ :  $y \leq 2x + 3$   
e disegniamo la retta  $r$ :  $y = 2x + 3$ .

L'insieme delle soluzioni è il semipiano inferiore delimitato da  $r$ , compresi i punti di  $r$ .

In alternativa, per la scelta del semipiano possiamo anche scegliere un punto del piano, per esempio l'origine, e sostituire le sue coordinate nella disequazione; troviamo in questo modo la relazione:

$$0 \leq 3 \quad \text{vera}$$

Il semipiano delle soluzioni è quello che contiene questo punto.



**2**  $2x + 6y - 3 > 0$

**4**  $x + 5y - 10 \geq 0$

**6**  $3x > 2y - 5$

**8**  $12y - 6x - 3 \leq 0$

**10**  $3 \leq x + 7y$

**12**  $9y - 3x + 4 < 0$

**14**  $3 - 2x + 4y \geq 0$

**16**  $-3x > 0$

**18**  $5x - \frac{3}{2}y + 5 < 0$

**20**  $12x + \frac{y}{3} - 1 \geq 0$

**22**  $3 - 2x \leq y$

**24**  $10x - y < 0$

**26**  $-3y + 2 \leq 0$

**3**  $4x - 7y < 0$

**5**  $9x + 6y - 1 \leq 0$

**7**  $4 - 3x \leq 0$

**9**  $8 + 3y > 0$

**11**  $7x - 21y \geq 9$

**13**  $10y \leq 3x + 15$

**15**  $8 + 2x < 6y$

**17**  $3x - 5y > 2$

**19**  $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - 1 \leq 0$

**21**  $6y - 2x + 5 < 0$

**23**  $5 + 2y - \frac{3x}{4} \leq 0$

**25**  $2 \geq -x + 3y$

**27**  $4x - 3y + 2 \leq 0$

*Scegli la risposta giusta.*

- 28** La disequazione  $y + 2x - 1 > 0$  è rappresentata dal semipiano delimitato dalla retta  $y = 1 - 2x$ :
- a. che contiene l'origine
  - b. che contiene il punto  $(2, 2)$ .

- 29** La disequazione  $x - 3 < 0$  individua:
- a. il semipiano a sinistra della retta  $x = 3$  compresi i punti di tale retta
  - b. il semipiano a destra della retta  $x = 3$  esclusi i punti di tale retta
  - c. il semipiano a sinistra della retta  $x = 3$  esclusi i punti di tale retta
  - d. i punti della retta  $x = 3$ .