

Problemi applicativi

La trigonometria ha molte applicazioni nella pratica ed i suoi teoremi sono utili per la risoluzioni di molti problemi; di seguito ne presentiamo alcuni che hanno a che vedere con la Fisica e la Topografia.

I problema: il piano inclinato

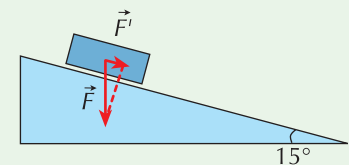
Un corpo di massa $m = 500\text{g}$, soggetto al proprio peso, scivola senza attrito lungo un piano, inclinato di 15° rispetto al suolo. Vogliamo calcolare la componente della forza peso che agisce nella direzione del piano inclinato.

Ricordiamo che la forza peso è $F = mg$, dove g rappresenta l'accelerazione gravitazionale che vale $9,8\text{m/s}^2$, e che tale forza ha sempre direzione verticale.

Per calcolare la sua componente F' nella direzione del piano inclinato ci possiamo riferire al triangolo rettangolo formato dalle due forze F e F' e dalla perpendicolare alla linea del piano stesso; tale triangolo, infatti, ha gli stessi angoli del triangolo che è il modello del piano inclinato (**figura 1**). Tenendo conto che $F = 0,5\text{kg} \cdot 9,8\text{m/s}^2$, possiamo quindi scrivere che la misura di F' , espressa in Newton, è

$$F' = F \cdot \sin 15^\circ = (0,5 \cdot 9,8 \cdot \sin 15^\circ) = 1,27$$

Figura 1



II problema: la risultante di due forze

Due forze \vec{F}_1 e \vec{F}_2 di intensità rispettivamente 42 Newton e 173 Newton sono applicate ad un punto O e le loro direzioni formano un angolo $\alpha = 60^\circ$. Vogliamo calcolare l'intensità e la direzione della loro risultante.

La risultante \vec{R} delle due forze si determina graficamente con la regola del parallelogramma (**figura 2a**). Dobbiamo quindi determinare la lunghezza della diagonale maggiore del parallelogramma e l'angolo che essa forma con una delle due forze.

Osserviamo che l'angolo β in **figura 2b** è supplementare di α ed è quindi di 120° ; si tratta allora di risolvere un triangolo conoscendo le misure di due lati e quella dell'angolo fra essi compreso.

Applicando il teorema di Carnot troviamo che, in Newton,

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta} = \\ &= \sqrt{42^2 + 173^2 - 2 \cdot 42 \cdot 173 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{38959} = 197,38 \end{aligned}$$

Per determinare la misura dell'angolo che la risultante forma con una delle due forze applichiamo il teorema dei seni

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{F_1}{\sin \gamma} \quad \rightarrow \quad \sin \gamma = \frac{F_1 \sin \beta}{R} = 0,184279074$$

da cui $\gamma = 10^\circ 37' 9''$.

III problema: la distanza tra due punti non accessibili

Si devono collegare due località A e B , che si trovano ai due lati opposti di una montagna, con una galleria rettilinea. Per poter valutare i costi dell'opera, si vuole sapere quanto sarà lunga la galleria.

Figura 2a

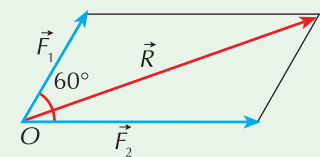
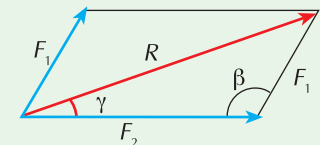


Figura 2b



Schematizziamo la situazione come in **figura 3**. Scegliamo un punto P dal quale sia possibile accedere alle due località in modo da poter misurare le lunghezze di PA e PB . Con un goniometro ottico misuriamo l'angolo \widehat{APB} .

La risoluzione del problema è ricondotta allora alla determinazione del lato AB del triangolo APB , conoscendone gli altri due lati e l'angolo fra essi compreso. Supponiamo dunque che le misurazioni abbiano fornito i seguenti dati:

$$PA = 860\text{m} \quad PB = 1250\text{m} \quad \widehat{APB} = 68^\circ 20' 37''$$

Possiamo calcolare la misura di AB e quindi la lunghezza della galleria applicando il teorema di Carnot

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{PB} \cdot \cos \widehat{APB}$$

da cui

$$\overline{AB} = \sqrt{860^2 + 1250^2 - 2 \cdot 860 \cdot 1250 \cdot \cos 68^\circ 20' 37''} = 1228,2773$$

La galleria sarà lunga circa 1228m.

IV problema: la rifrazione

Quando un raggio luminoso arriva sulla superficie di separazione di due mezzi diversi A e B (ad esempio un raggio di luce che, attraversando l'aria, arriva sulla superficie di uno specchio d'acqua), prosegue il suo cammino nel secondo mezzo subendo una deviazione. Tale fenomeno, che prende il nome di **rifrazione** della luce, è soggetto a due leggi (**figura 4**):

- il raggio incidente, il raggio rifratto e la perpendicolare condotta alla superficie di separazione dei due mezzi appartengono allo stesso piano che è, a sua volta, perpendicolare a quello della superficie;
- il rapporto fra il seno dell'angolo α di incidenza e quello β di rifrazione è costante e dipende dalla natura dei mezzi fra i quali avviene il passaggio della luce. Tale rapporto si dice **indice di rifrazione relativo** del mezzo B rispetto al mezzo A .

Supponiamo, ad esempio, che un raggio di luce monocromatica investa la superficie piana di un blocco di quarzo formando un angolo di 30° con la perpendicolare. Se l'indice di rifrazione del quarzo rispetto all'aria vale 1,4702, ci chiediamo quale sarà l'angolo di rifrazione del raggio.

Dalla seconda legge ricaviamo che

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1,4702 \quad \text{da cui} \quad \sin \beta = \frac{\sin 30^\circ}{1,4702}$$

L'angolo di rifrazione è dunque $19^\circ 52' 56''$.

Figura 3

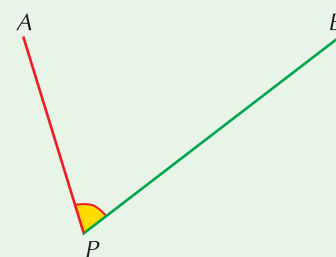
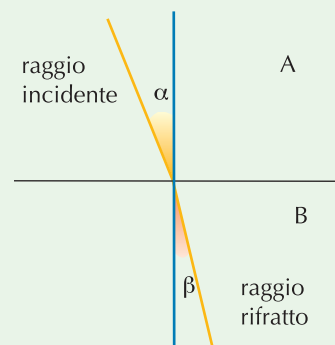


Figura 4



ESERCIZI

Problemi di fisica

1 ESERCIZIO GUIDATO

Un corpo, partendo da fermo, scivola senza attrito lungo un piano inclinato lungo 400m impiegando 40 secondi. Determina l'inclinazione del piano rispetto a quello orizzontale.

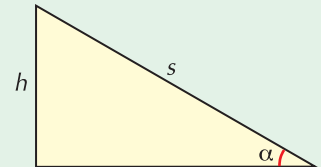
Il moto di un corpo lungo un piano inclinato è uniformemente accelerato e quindi soggetto alla legge

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{da cui ricavi che} \quad a = \dots\dots\dots$$

Poiché, in questo caso, $s = 400$ e $t = 40$, si ha che $a = \dots\dots\dots$

Se s è la lunghezza del piano inclinato e h è la sua altezza, vale poi la relazione

$$\frac{h}{s} = \frac{a}{g} \quad \text{dove } g \text{ è l'accelerazione di gravità. Essendo poi } \frac{h}{s} = \sin \alpha, \text{ si ricava che } \alpha = 2^\circ 55' 28''.$$



- 2 Una massa di terreno fangoso sta per scivolare lungo il fianco di una montagna inclinato di 30° rispetto al piano orizzontale. Quale forza si deve applicare per impedirle di scivolare se la sua massa è di 3 quintali? [1470 Newton]
- 3 Due forze F_1 ed F_2 fra loro perpendicolari e rispettivamente di intensità 50 ed 80 Newton vengono applicate ad un corpo. Qual è l'intensità della risultante e l'angolo che essa forma con F_2 ? [$R = 94,34$ Newton; $\alpha = 32^\circ 19''$]
- 4 Un corpo di massa $m = 400\text{kg}$, soggetto al proprio peso, scivola senza attrito lungo un piano inclinato di 25° rispetto al suolo. Calcola la componente della forza peso che agisce nella direzione del piano inclinato. [≈ 169]
- 5 Sopra un piano inclinato c'è un peso di 400 Newton e per mantenerlo in equilibrio occorre una forza di 92 Newton parallela al piano. Calcola l'inclinazione del piano. [$13^\circ 17' 49''$]
- 6 Due forze di intensità rispettivamente $F_1 = 5$ Newton e $F_2 = 8,5$ Newton hanno una risultante \vec{R} di intensità 10 Newton. Calcola l'angolo γ che \vec{R} forma con \vec{F}_1 e l'angolo α che le due forze \vec{F}_1 ed \vec{F}_2 formano tra loro. [$\gamma = 58^\circ 9' 48''$; $\alpha = 88^\circ 8' 45''$]