LA PROBABILITÀ

IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

richiami della teoria

- un evento E si dice **casuale** o **aleatorio**, quando il suo verificarsi dipende unicamente dal caso;
- un evento si dice **certo** quando è possibile stabilire con assoluta certezza il suo verificarsi;
- un evento si dice **impossibile** quando non potrà mai realizzarsi;
- la **probabilità (definizione classica)** $p(E)$ di un evento E è data dal rapporto fra il numero f di casi favorevoli all'evento e il numero complessivo n dei casi possibili. In simboli: $p(E) = \frac{f}{n}$.

  La probabilità di un evento **certo** è uguale a **1**, di un evento **impossibile** è uguale a **0** e di un evento **aleatorio** qualsiasi è un numero compreso tra 0 e 1, cioè $\mathbf{0 \leq p \leq 1}$;
- la **probabilità totale di due o più eventi incompatibili** è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento;
- la **probabilità totale di due eventi compatibili** è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento diminuita della probabilità comune ai due eventi;
- due eventi sono **complementari** quando il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro ma sicuramente uno dei due eventi si verificherà;
- la **probabilità di un evento composto *E***, costituito da due eventi E_1 e E_2 fra loro **indipendenti**, si ottiene effettuando il prodotto delle probabilità di ciascun evento e viene chiamata anche **probabilità composta**;
- la **probabilità di un evento composto *E*** costituito da due eventi E_1 e E_2 fra loro **dipendenti**, si ottiene effettuando il prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità condizionata di E_2;
- la **probabilità (definizione frequentista)** di un evento E in un esperimento è il valore della frequenza relativa di E cioè $p(E) =$ frequenza assoluta : n° prove;
- la **probabilità (definizione soggettiva)** di un evento E è il rapporto fra il prezzo P che si è disposti a pagare e la somma S che si ritiene di dover avere in cambio se l'evento si verifica.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

1 Un evento si dice aleatorio se:
a. probabilmente si verifica;
b. il suo verificarsi dipende solo dal caso;
c. si verifica sicuramente.

2 La probabilità classica p di un evento E è data dalla formula:

a. $p(E) = \frac{f}{n}$ $\Rightarrow$ con n casi possibili e f casi favorevoli all'evento;

b. $p(E) = \frac{n}{f}$ $\Rightarrow$ con n casi possibili e f casi favorevoli all'evento;

c. $p(E) = \frac{1}{f}$ $\Rightarrow$ con f casi favorevoli all'evento.

3 Completa le seguenti proprietà:
a. la probabilità di un evento certo è sempre uguale a ....;
b. la probabilità di un evento impossibile è sempre uguale a ....

4 Tra quali numeri è compresa la probabilità di un evento aleatorio qualsiasi?

5 Completa le seguenti frasi:
a. due eventi si dicono incompatibili quando il verificarsi del primo .... il verificarsi del secondo, ovvero i due eventi .... verificarsi ....;
b. la probabilità totale di due o più eventi incompatibili è uguale .... delle probabilità di ciascun evento.

6 Due eventi si dicono compatibili quando:
a. il verificarsi del secondo non esclude il verificarsi del primo;
b. il verificarsi del primo esclude il verificarsi del secondo;
c. il verificarsi del primo non esclude il verificarsi del secondo.

7 Con quale formula si calcola la probabilità totale di due eventi compatibili?
a. $p_t = p_1 + p_2$; **b.** $p_t = p_1 + p_2 - p_c$; **c.** $p_t = p_1 + p_2 + p_c$.

8 Completa le seguenti definizioni:
a. due eventi si dicono complementari quando il verificarsi del primo .... il verificarsi del secondo, ma sicuramente ....;
b. la probabilità inversa di un evento p è la probabilità che p ....

9 La somma delle probabilità di due eventi complementari è sempre uguale a:
a. 1; **b.** 0; **c.** non si può sapere.

10 Completa le seguenti frasi:
a. due eventi E_1 e E_2 si dicono dipendenti se il verificarsi .... modifica la probabilità ....;
b. la probabilità composta di due eventi dipendenti si ottiene moltiplicando .... per la probabilità condizionata ....;
c. sia n il numero di prove eseguite, tutte uguali e nelle medesime condizioni, ed f il numero degli esiti favorevoli, la probabilità frequentista $p(E)$ di un evento E è data .... fra ....;
d. se sottoponiamo un evento casuale ad un numero .... di prove, mantenendo sempre le condizioni iniziali, otteniamo una frequenza che si .... alla ....; aumentando il numero di prove, la .... tende a coincidere sempre più con la ....;
e. la probabilità soggettista $p(E)$ di un evento E è il rapporto tra il .... P che un individuo è disposto a pagare e la .... S che vuole ricevere nel caso si verifichi l'evento.

11 Con quale formula si calcola la probabilità dell'evento composto di due eventi fra loro indipendenti?
a. $p(E) = p(E_1) + p(E_2)$; **b.** $p(E) = p(E_1) : p(E_2)$; **c.** $p(E) = p(E_1) \cdot p(E_2)$.

12 La probabilità di due eventi dipendenti è uguale a:
a. $p_t = p(E_1) : p(E_2/E_1)$; **b.** $p_t = p(E_1) \cdot p(E_2/E_1)$; **c.** $p_t = p(E_1) - p(E_2/E_1)$.

APPLICAZIONE

13 *Esercizio Svolto*

Calcola la probabilità che lanciando un dado esca il numero 5, esprimendola in frazione, valore decimale e valore percentuale.

Il dado ha sei facce quindi $n = 6$; l'evento: «esce il numero 5» ha una sola possibilità di verificarsi dunque $f = 1$; pertanto:

a. p (valore frazione) $= \frac{1}{6}$;

b. p (valore decimale) $= 1 : 6 = 0{,}1666....... = 0{,}1\overline{6}$;

c. p (valore percentuale) $= 0{,}166 \cdot 100\% = 16{,}\overline{6}\%$.

14 Calcola la probabilità che da un mazzo di 40 carte venga estratto il 2 di denari, esprimendola in frazione, valore decimale e valore percentuale. $\left[\frac{1}{40}\right]$

15 Da un'urna contenente 10 palline rosse, 5 verdi e 12 blu si estrae una pallina. Calcola la probabilità che sia rossa esprimendola in frazione, valore decimale e valore percentuale. $\left[\frac{10}{27}\right]$

16 Calcola la probabilità che da un mazzo di 40 carte venga estratto un re, esprimendola in frazione, valore decimale e valore percentuale. $\left[\frac{1}{10}\right]$

17 Calcola la probabilità che da un'urna contenente 10 palline rosse e 4 gialle si estragga una pallina gialla. $\left[\frac{2}{7}\right]$

18 Calcola la probabilità che da un mazzo di 54 carte si estragga un jolly. $\left[\frac{1}{27}\right]$
(Suggerimento: ricorda che i jolly sono 2)

19 *Esercizio Svolto*

Calcola la probabilità totale nei seguenti casi:

a. lanciando un dado si verifichi l'evento E_1: «esce il numero 6» oppure l'evento E_2: «esce un numero dispari»;

b. estraendo una carta da un mazzo di 40 carte si verifichi l'evento E_1: «esce una carta di coppe» oppure l'evento E_2: «esce un fante».

a. Osserviamo che i due eventi sono incompatibili cioè non si possono verificare contemporaneamente; infatti il caso favorevole all'evento E_1 è il numero 6, mentre i casi favorevoli all'evento E_2 sono i numeri 1, 3 e 5. La probabilità totale di due eventi incompatibili si ottiene come somma delle probabilità dei singoli eventi:

$$p(E_1) = \frac{1}{6}; \quad p(E_2) = \frac{3}{6} \quad \text{pertanto} \quad p_t = p(E_1) + p(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

b. Gli eventi sono compatibili cioè si possono verificare contemporaneamente; infatti il fante di coppe verifica entrambi gli eventi. La probabilità totale di due eventi compatibili si ottiene come somma delle probabilità dei singoli eventi diminuita della probabilità dell'evento comune:

$$p(E_1) = \frac{10}{40}; \quad p(E_2) = \frac{4}{40}; \quad p_c = \frac{1}{40}; \text{ pertanto } p(E_1) + p(E_2) - p_c = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

20 Calcola la probabilità totale nei seguenti casi:

a. lanciando un dado si verifichi l'evento E_1: «esce il numero 2» oppure l'evento E_2: «esce il un numero pari»; $\left[\frac{1}{2}\right]$

b. estraendo una carta da un mazzo di 40 carte si verifichi l'evento E_1: «esce un tre» oppure l'evento E_2: «esce un cinque». $\left[\frac{1}{5}\right]$

21 Calcola la probabilità che estraendo una pallina da un'urna contenente 14 palline verdi, 5 rosse e 3 gialle, esca indifferentemente una pallina rossa o gialla. $\left[\frac{4}{11}\right]$

22 Calcola la probabilità che lanciando un dado esca un numero divisibile per tre o un numero pari. $\left[\frac{2}{3}\right]$

23 Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di 40 carte esca un tre o una carta di denari. $\left[\frac{13}{40}\right]$

24 In un sacchetto ci sono 20 bussolotti contrassegnati da un numero da 1 a 20. Calcola la probabilità che estraendo un bussolotto sia estragga un multiplo di 2 o di 3. $\left[\frac{13}{20}\right]$

25 Calcola la probabilità che lanciando un dado esca un numero divisibile per 5 o un multiplo di 3. $\left[\frac{1}{2}\right]$

26 Calcola la probabilità che estraendo da un mazzo di 40 carte una carta questa sia di coppe o un fante. $\left[\frac{13}{40}\right]$

27 Qual è la probabilità che nel gioco del Lotto, alla prima estrazione sulla ruota di Roma, si ottenga un numero maggiore di 20 oppure divisibile per 10. $\left[\frac{4}{5}\right]$

28 *Esercizio Svolto*

Calcola la probabilità di estrarre un tre e una figura da un mazzo di 40 carte in successione e rimettendo la prima carta estratta nel mazzo. Come cambia il valore della probabilità se si effettua la seconda estrazione senza aver rimesso la prima carta estratta nel mazzo nell'ipotesi che alla prima estrazione non sia uscita una figura?

Osserviamo che i due eventi E_1: «estrarre un tre» ed E_2: «estrarre una figura» sono indipendenti, cioè l'aver estratto un tre con la prima estrazione non condiziona l'estrazione di una figura nella seconda visto che la prima carta viene rimessa nel mazzo. La probabilità composta si calcola allora come prodotto delle due probabilità semplici:

$$p(E_1) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}; \qquad p(E_2) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} \quad \text{pertanto} \quad p_c = p(E_1) \cdot p(E_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{100}.$$

Se non si rimette la prima carta estratta nel mazzo, la probabilità dell'evento E_2 risulta condizionata dal fatto che nel mazzo sono rimaste 39 carte:

$$p(E_1) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}; \qquad p(E_2) = \frac{12}{39} = \frac{4}{13} \quad \text{pertanto} \quad p_c = p(E_1) \cdot p(E_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{130} = \frac{2}{65}.$$

29 Calcola la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte, in successione e rimettendo la carta estratta nel mazzo, un cinque di coppe e una carta di picche. $\left[\frac{1}{160}\right]$

30 Calcola la probabilità che lanciando due volte un dado esca entrambe le volte un tre. $\left[\frac{1}{36}\right]$

31 Calcola la probabilità che da un mazzo di 40 carte si estraggano in successione e rimettendo le carte estratte nel mazzo prima un re poi una carta di fiori. $\left[\frac{1}{40}\right]$

32 Calcola la probabilità che estraendo da un mazzo di 40 carte due carte, senza rimettere la prima nel mazzo, siano un tre e una figura.
$\left[\frac{2}{65}\right]$

33 Da un'urna contenente 10 palline verdi, 6 rosse e 3 gialle si estraggono due palline, rimettendo di volta in volta la pallina nell'urna. Calcola la probabilità che le palline estratte siano la prima gialla e la seconda verde.
$\left[\frac{30}{361}\right]$

34 Qual è la probabilità di estrarre, nel gioco della tombola, con le prime due estrazioni prima il tre e poi il venti?
$\left[\frac{1}{8010}\right]$

35 Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte e, dopo averla inserita, si estrae una seconda carta. Calcola la probabilità che le carte estratte siano:
a. la prima una figura e la seconda un 3;
b. la prima un re e la seconda un 5.
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{3}{100};\ \mathbf{b.}\ \frac{1}{100}\right]$

36 Considera l'esercizio precedente e calcola i valori di probabilità se, nei due casi, la carta estratta non viene inserita nel mazzo.
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{3}{130},\ \frac{2}{65};\ \mathbf{b.}\ \frac{1}{130},\ \frac{2}{195}\right]$

37 Calcola la probabilità dei seguenti eventi:
a. ottenere due numeri pari lanciando due volte il dado;
b. estrarre la prima carta di cuori e la seconda di fiori da un mazzo di 40 carte, senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo nell'ipotesi che alla prima estrazione non sia uscita una carta di fiori;
c. estrarre due figure senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo;
d. estrarre due assi uguali rimettendo la prima carta estratta nel mazzo.
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{1}{4};\ \mathbf{b.}\ \frac{5}{78};\ \mathbf{c.}\ \frac{11}{130};\ \mathbf{d.}\ \frac{1}{400}\right]$

38 *Esercizio Svolto*

Calcola la probabilità di estrarre da un sacchetto contenente 10 palline rosse, 5 gialle e 6 verdi, in successione e rimettendo le palline estratte nel mazzo, una pallina rossa, una gialla e una verde.

Dobbiamo calcolare la probabilità di un evento composto E che è costituito da tre eventi semplici indipendenti:
- estrazione di una pallina rossa da un sacchetto che ne contiene 10 rosse con un totale di 21 palline;
- estrazione di una pallina gialla da un sacchetto che ne contiene 5 gialle con un totale di 21 palline;
- estrazione di una pallina verde da un sacchetto che ne contiene 6 verdi con un totale di 21 palline.

Calcoliamo le probabilità di ciascuno dei tre eventi:

$$p_r = \frac{10}{21}; \qquad p_g = \frac{5}{21} \qquad p_v = \frac{6}{21}.$$

Determiniamo la probabilità dell'evento composto: $p(E) = p_r \cdot p_g \cdot p_v = \frac{10}{21} \cdot \frac{5}{21} \cdot \frac{6}{21} = \frac{100}{3087}$.

39 Da un sacchetto contenente i 90 numeri del gioco della tombola si estraggono due numeri, uno di seguito all'altro, rimettendo il primo numero nel sacchetto. Qual è la probabilità che escano, a prescindere dall'ordine, un numero multiplo di 5 e il numero 6?
$\left[\frac{1}{450}\right]$

40 Calcola la probabilità di estrarre da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola in successione e rimettendo i numeri estratti nel sacchetto, un numero minore di 10, il 20 e un multiplo di 45.
$\left[\frac{1}{40\,500}\right]$

41 Calcola la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte in successione e rimettendo la prima carta estratta nel mazzo, il 5 di denari e una carta di coppe. $\left[\frac{1}{160}\right]$

42 Calcola la probabilità di estrarre da un mazzo di 52 carte in successione e rimettendo le carte estratte nel mazzo, un dieci, una figura e una carta contrassegnata da un numero divisibile per 4. $\left[\frac{6}{2197}\right]$

43 *Esercizio Svolto*

Supponiamo di estrarre due numeri da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola e, senza rimettere il primo estratto nel sacchetto, estraiamo un secondo numero. Ci domandiamo qual è la probabilità che tutti e due i numeri siano pari.

Inizialmente il sacchetto contiene tanti numeri pari quanti dispari, ma poiché il numero estratto per primo non viene riposto nel sacchetto, la seconda estrazione dipenderà dal risultato della prima. Quindi i due eventi sono fra loro dipendenti. In questo caso possiamo utilizzare la formula della probabilità condizionata:

$$p(E_1)=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}; \qquad p(E_2/E_1)=\frac{44}{89}; \qquad p_t=p(E_1)\cdot p(E_2/E_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{44}{89}=\frac{22}{89}$$

44 Calcola la probabilità che estraendo da un sacchetto contenente 7 palline gialle e 10 blu, due palline, senza rimettere la prima nel sacchetto, siano la prima gialla e l'altra blu. $\left[\frac{35}{136}\right]$

45 Calcola la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte, in successione e senza rimettere la carta estratta nel mazzo, un 3 e una carta di denari nell'ipotesi che la prima carta estratta sia il 3 di denari. $\left[\frac{3}{130}\right]$

46 *Esercizio Guidato*

Supponiamo di estrarre due palline da un sacchetto contenente 15 palline verdi, 10 rosse e 20 blu e, senza rimettere la prima estratta nel sacchetto, estraiamo una seconda pallina. Ci domandiamo qual è la probabilità che tutte e due le palline siano rosse.

Inizialmente il sacchetto contiene ..... palline rosse su un totale di ..... Dopo aver fatto la prima estrazione il sacchetto conterrà ..... palline rosse. Quindi i due eventi sono fra loro ...., pertanto:

$$p(E_1)=\frac{....}{45}=\frac{2}{....}; \qquad p(...../E_1)=\frac{....}{44}; \qquad p_t=.........\cdot p(...../E_1)=\frac{......}{......}\cdot\frac{......}{......}=\frac{1}{22}$$

47 Un'urna contiene 15 palline bianche, 10 rosse, 16 verdi e 24 gialle. Qual è la probabilità che, effettuando tre estrazioni successive e non rimettendo la prima e la seconda pallina estratta nell'urna, le tre palline siano tutte rosse. $\left[\frac{1}{364}\right]$

48 Estraendo due numeri da un sacchetto contenente i numeri da 1 a 50, senza rimettere il primo estratto nel sacchetto, qual è la probabilità che il primo numero sia inferiore a 5 e l'altro sia compreso tra 10 e 20 (esclusi il 10 e il 20)? $\left[\frac{18}{1225}\right]$

49 *Esercizio Svolto*

Lucia lancia 18 volte un dado ed ottiene i seguenti risultati: 2, 3, 5, 4, 2, 6, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 2, 4, 6, 6, 3, 1. Qual è la probabilità che nel prossimo lancio esca un 2?

Le prove eseguite sono i 18 lanci e la frequenza assoluta dell'evento «esce 2» è 4. La nostra aspettativa è allora che Lucia possa ottenere 2 nel prossimo lancio con probabilità pari a $p(E)=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$.

50 Marco lancia 20 volte una moneta ed ottiene i seguenti risultati: T, C, T, C, C, T, C, T, C, C, T, C, T, C, T, C, T, T, C, C. Qual è la probabilità che nel prossimo lancio esca croce? $\left[\frac{11}{20}\right]$

51 Luca giocando con un videogame ottiene i seguenti punti: 250, 140, 135, 145, 250, 145, 140, 250, 140, 120, 145, 140, 140, 140, 250, 250, 145, 135, 120, 135. Qual è la probabilità che nella prossima partita ottenga un punteggio superiore a 130? $\left[\frac{9}{10}\right]$

52 Matteo, nel gioco delle freccette, totalizza i seguenti punti: 25, 25, 50, 30, 25, 25, 30, 35, 35, 25, 50, 35, 25, 30, 30, 50. Qual è la probabilità che nel prossimo lancio totalizzi 25 punti? $\left[\frac{3}{8}\right]$

53 Da un'urna contenente 10 palline verdi, 10 rosse e 10 blu, si estraggono in successione, rimettendo di volta in volta la pallina nell'urna, 20 palline. I risultati ottenuti sono i seguenti: V; V; B; R; V; B; R; B; V; R; R; R; V; B; B; V; V; R; R; B. Calcola la probabilità di estrarre una pallina blu usando sia la definizione classica di probabilità sia la definizione frequentista. $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{10}\right]$

54 Indica quale delle seguenti risposte è quella che è più probabile che si avvicini alla realtà.
E' stato lanciato 200 volte un dado e l'evento E : «esce il numero 4» si è ripresentato:
a. 35 volte; **b.** 8 volte; **c.** 7 volte; **d.** 50 volte. [**a.**]

55 Indica quale delle seguenti risposte è quella che è più probabile che si avvicini alla realtà.
Quante volte sono state lanciate due monete se l'evento E : «esce la doppia testa» si è ripresentato per 100 volte?
a. 210; **b.** 1000; **c.** 410; **d.** 350. [**c.**]

56 *Esercizio Svolto*

Una persona scommette € 30 sulla vittoria di un amico in una gara di ciclismo con la speranza di vincere € 120. Qual è la probabilità di vincere che lo scommettitore attribuisce a quell'amico?

Applichiamo la definizione di probabilità soggettiva: $p(E) = \frac{P}{S} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$.

Pertanto la probabilità di vincere è $\frac{1}{4}$.

57 Luca scommette € 40 per averne in cambio € 50 nel caso in cui ottenga un ottimo risultato nel compito di italiano. Qual è la probabilità che Luca attribuisce all'evento? $\left[\frac{4}{5}\right]$

58 Paolo scommette € 30 per riceverne in cambio € 50 nel caso in cui un suo amico riesca a saltare un metro e mezzo nel salto in alto. Qual è la probabilità che Paolo attribuisce all'evento? $\left[\frac{3}{5}\right]$

59 Giulio è disposto a pagare € 40 per riceverne € 120 nel caso in cui suo padre vinca l'incontro di tennis con suo zio. Qual è la probabilità che Paolo attribuisce all'evento? $\left[\frac{1}{3}\right]$