Approfondimento

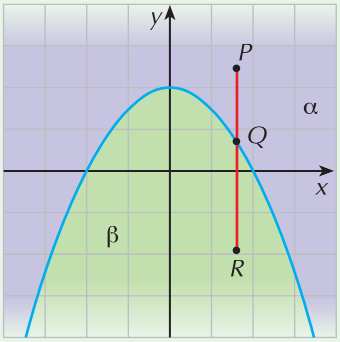
Le disequazioni in due variabili

Risolviamo la disequazione: $y \geq -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Disegniamo dapprima la parabola: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Essa divide il piano in due regioni α e β; i punti P che appartengono alla regione α hanno un'ordinata maggiore dei punti Q aventi la stessa ascissa che si trovano sulla parabola, quelli R della regione β hanno un'ordinata minore (***figura 1***). Questo significa che la disequazione è soddisfatta da tutti e soli i punti di α.

Figura 1



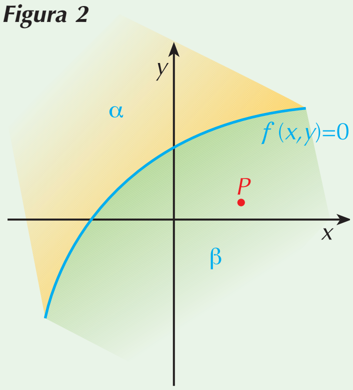
In generale, per risolvere una disequazione in due variabili nella forma

$$f(x,\ y) \gtreqless 0$$

si procede in questo modo, analogo a quello visto per le disequazioni lineari:

- si costruisce il grafico della relazione $f(x,\ y) = 0$ e si individuano le regioni del piano da essa delimitate
- si considera un punto $P(x_0,\ y_0)$ in una qualsiasi di tali regioni e si valuta $f(x_0,\ y_0)$
- se si ottiene una disuguaglianza vera, la regione delle soluzioni è quella che contiene il punto P (***figura 2***).

Figura 2



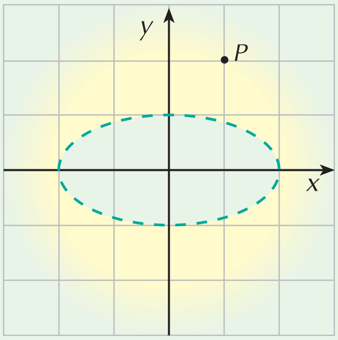
Vediamo qualche altro esempio.

- Risolviamo la disequazione $x^2 + 4y^2 - 4 > 0$.

  Riscriviamo la disequazione nella forma $\frac{x^2}{4} + y^2 > 1$ ed associamo ad essa l'equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ che rappresenta un'ellisse di semiassi 2 e 1. Poiché vogliamo che $\frac{x^2}{4} + y^2$ sia maggiore di 1, la regione delle soluzioni è costituita dai punti che si trovano all'esterno dell'ellisse, esclusi i punti di tale curva (***figura 3***).
  Puoi verificarlo in modo molto semplice considerando un punto qualunque di questa regione, ad esempio il punto $P(1,\ 2)$, e verificando che le sue coordinate soddisfano la disequazione:

  $$1 + 16 - 4 > 0$$

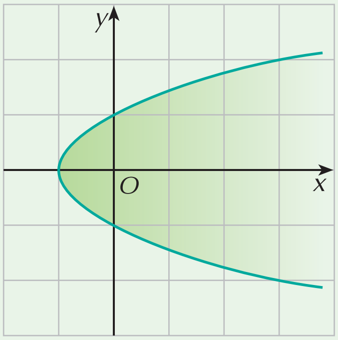
Figura 3



- Risolviamo la disequazione $x \geq y^2 - 1$.

  L'equazione $x = y^2 - 1$ ad essa associata rappresenta una parabola con asse coincidente con l'asse x avente vertice nel punto $(-1,\ 0)$ (***figura 4***). I punti che si trovano nella regione in colore hanno, a parità di ordinata, una ascissa maggiore di quelli che si trovano sulla parabola;

Figura 4



tale regione è dunque l'insieme dei punti che sono soluzione della disequazione data, compresi i punti della parabola stessa.
Puoi anche individuare l'insieme delle soluzioni considerando un punto di una delle due regioni, ad esempio l'origine: poiché le sue coordinate soddisfano la disequazione ($0 \geq -1$ è vero), questa è la regione cercata.

- Risolviamo la disequazione $y \geq \sqrt{25 - x^2}$.

Rappresentiamo dapprima l'equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$.

Esistenza e concordanza di segno:

$-5 \leq x \leq 5 \quad \wedge \quad y \geq 0$

Eleviamo al quadrato:

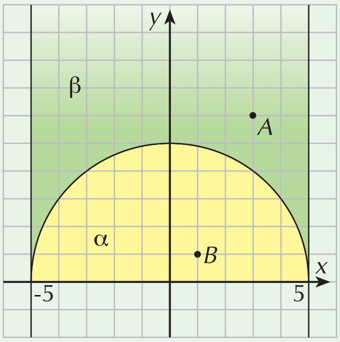
$y^2 = 25 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 25$

La curva rappresenta la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 5 (***figura 5***).
La zona individuata dal dominio della funzione, cioè l'intervallo $[-5, 5]$, e dal semipiano delle y positive o nulle, rimane diviso in due parti.
Prendiamo un punto in ciascuna zona, per esempio $A(3, 6)$ e $B(1, 1)$, e vediamo quale dei due soddisfa la disequazione:

$A(3, 6)$: $\quad 6 \geq \sqrt{25 - 9} \quad \rightarrow \quad 6 \geq 4 \quad$ vero

$B(1, 1)$: $\quad 1 \geq \sqrt{25 - 1} \quad \rightarrow \quad 1 \geq \sqrt{24} \quad$ falso

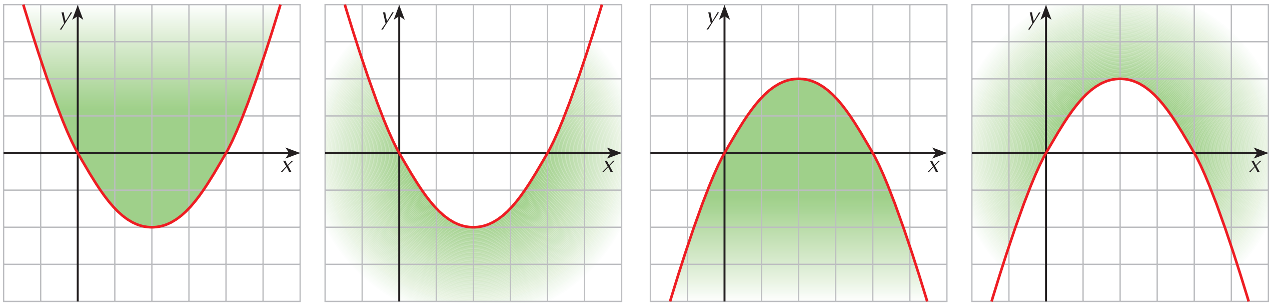
Figura 5



L'insieme delle soluzioni è quella rappresentata dalla regione β, compresi i punti della semicirconferenza.

ESERCIZI

1 Individua fra i seguenti disegni quello che rappresenta correttamente la regione delle soluzioni della disequazione $x^2 - 4x - 2y > 0$.



a. **b.** **c.** **d.**

2 La disequazione $16 < x^2 + 4y^2$ è verificata dalla regione di piano che, rispetto all'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, è formata dai punti:

a. che sono all'interno dell'ellisse esclusi i punti dell'ellisse
b. che sono all'interno dell'ellisse compresi i punti dell'ellisse
c. che sono all'esterno dell'ellisse compresi i punti dell'ellisse
d. che sono all'esterno dell'ellisse esclusi i punti dell'ellisse.

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni non lineari in due variabili.

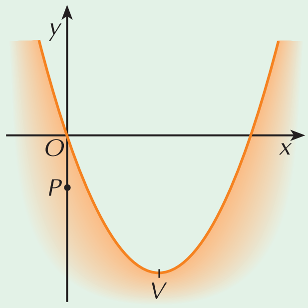
3 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x^2 - 3x - y \geq 0$

Esplicitando rispetto a y riscriviamo la disequazione nella forma

$$y \leq x^2 - 3x$$

La parabola $y = x^2 - 3x$ ha vertice $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ e passa per l'origine degli assi. Scelto un punto in una delle due regioni, per esempio $P(0, -1)$, vediamo se le sue coordinate soddisfano la disequazione: $1 \geq 0$. La regione delle soluzioni è quindi quella che contiene P.



4 $y \geq 3 - x^2$

5 $x^2 + y^2 - 4x - 5 > 0$

6 $6x - 4y^2 + 1 < 0$

7 $x^2 - y^2 > 3$

8 $x^2 + 4y^2 \leq 1$

9 $y \geq \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

10 $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$

11 $y \leq \sqrt{1 - x^2} + 1$

12 $(x-1)^2 + (y+3)^2 - 4 > 0$

13 $(x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 16$

14 $x^2 + y^2 - 2x + 4y \geq 0$

15 $x^2 - y^2 \geq 9$

16 $y + 3x^2 - 12x > 0$

17 $x + 7y^2 - 14 \leq 0$

18 $y \leq \sqrt{x}$

19 $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 \geq 0$

20 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1$

21 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{6} \geq 1$

22 $xy \leq 1$

23 $x^2 + y^2 - 3x - y \geq 3$

24 $x^2 - y^2 \geq 4$

25 $y \geq \sqrt{x + 1}$

26 $x^2 + 49y^2 \leq 49$

27 $9x^2 + y^2 \geq 9$

28 $x^2 + y^2 + y - 1 \geq 0$

29 $y \leq 2\sqrt{3 - x^2}$

30 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 1 \geq 0$

31 $x^2 - y - 5x + 6 \leq 0$

32 $\frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1$

33 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} + 1 \geq 0$

34 $x^2 + y^2 - 10y + 22 \geq 0$

35 $3x^2 - y^2 \leq 27$

36 $x^2 + y^2 - 2|x| - 4 \geq 0$

37 $x^2 - y + |x - 1| < 0$

38 $|x^2 - y^2| > 1$

39 $|x^2 - 9y^2| < 4$