

Le matrici di ordine 3 e il metodo di Cramer per i sistemi con tre incognite

Il metodo di Cramer può essere usato anche per questo tipo di sistemi e la procedura di calcolo è analoga a quella imparata per i sistemi di due equazioni; vediamo come procedere considerando il sistema

$$\begin{cases} y + x - z - 3 = 0 \\ x - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \\ 2z - y + 3x - 5 = 0 \end{cases}$$

Scriviamolo innanzi tutto in forma normale mettendo prima le x , poi le y , da ultimo le z e trasportando i termini noti al secondo membro:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 3y = 1 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Scriviamo adesso la matrice dei coefficienti del sistema scrivendo nell'ordine la colonna dei coefficienti di x , quella dei coefficienti di y e da ultimo quella dei coefficienti di z (nella seconda equazione la z non c'è e dobbiamo scrivere 0 come coefficiente):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per calcolare il determinante di questa matrice si procede in questo modo:

- si riscrivono le prime 2 colonne accanto alla matrice; nel nostro caso otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

- si calcola la differenza tra la somma algebrica dei prodotti dei numeri lungo le diagonali principali (segnate in rosso) e la somma algebrica dei prodotti dei numeri lungo le diagonali secondarie (segnate in blu)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= [1 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1)] - [3 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1] =$$

$$= [-6 + 2] - [9 + 4] = -4 - 13 = -17. \text{ Dunque } \Delta = -17.$$

Calcoliamo adesso il determinante Δ_x della matrice che si ottiene sopprimendo la colonna x della matrice dei coefficienti e sostituendola con quella dei termini noti:

colonna dei termini noti

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 1 & -1 & | & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & | & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 2 & | & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= [3 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1)] - [5 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1] = \\ &= [-18 + 1] - [15 + 2] = -17 - 17 = -34 \end{aligned}$$

Analogamente, calcoliamo Δy e Δz .

colonna dei termini noti

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3} & -1 & | & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & | & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & | & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= [1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 5] - [3 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3] = -8 - 9 = -17$$

colonna dei termini noti

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} & | & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & | & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & | & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= [1 \cdot (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-1)] - [3 \cdot (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 1] = -18 + 18 = 0$$

Allora, essendo $\Delta \neq 0$ la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta y}{\Delta} \\ z = \frac{\Delta z}{\Delta} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \frac{-34}{-17} = 2 \\ y = \frac{-17}{-17} = 1 \\ z = \frac{0}{-17} = 0 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad S = \{(2, 1, 0)\}.$$

ESERCIZI

Il metodo di Cramer per i sistemi con tre incognite

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 15 \\ 6x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + 7y = -18 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di Cramer e calcoliamo i tre determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & 3 & -4 \\ 6 & -3 & 2 & 6 & -3 \\ 4 & 7 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= [3 \cdot (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7] - [4 \cdot (-3) \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot (-4)] = 196$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ -18 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -4 & 5 & 15 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ -18 & 7 & 0 & -18 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= [15 \cdot (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 2 \cdot (-18) + 5 \cdot 4 \cdot 7] - [(-18) \cdot (-3) \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \cdot (-4)] = -196$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & -18 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 5 & 3 & 15 \\ 6 & 4 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & -18 & 0 & 4 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= [3 \cdot 4 \cdot 0 + 15 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot (-18)] - [4 \cdot 4 \cdot 5 + (-18) \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot 15] = -392$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 15 \\ 6 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 15 & 3 & -4 \\ 6 & -3 & 4 & 6 & -3 \\ 4 & 7 & -18 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= [3 \cdot (-3) \cdot (-18) + (-4) \cdot 4 \cdot 4 + 15 \cdot 6 \cdot 7] - [4 \cdot (-3) \cdot 15 + 7 \cdot 4 \cdot 3 + (-18) \cdot 6 \cdot (-4)] = 392$$

Poichè $\Delta \neq 0$, il sistema è determinato ed ha soluzione:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-196}{196} = -1 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-392}{196} = -2 \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{392}{196} = 2 \quad [S = \{(-1, -2, 2)\}]$$

$$2 \quad \begin{cases} 3x + y - 6z = 16 \\ x - 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = -6 \end{cases} \quad [S = \{(4, -2, -1)\}; S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -1, 2\right)\right\}]$$

$$3 \quad \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 3y + 12 = x + z \\ 3x - 11 = y - 2z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 1 + 3z \\ 7x = 12 - 2y \\ 5x - 4z = 6 \end{cases} \quad [S = \{(2, -3, 1)\}; S = \{(2, -1, 1)\}]$$

$$4 \quad \begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 3x + y = -3 - 2z \\ 2x - 1 = y + z \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + z = \frac{3}{2}(y - z + 1) \\ 2y - 5z = x - 1 \end{cases} \quad [S = \{(0, 1, -2)\}; S = \{(3, 1, 0)\}]$$

$$5 \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x - y + 2z = -5 \\ 3x - 1 = -(2z + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2z - 3 \\ 2x - 2y = -1 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$$

$$[S = \{(0, 3, -1)\}; S = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, -1, 2 \right) \right\}]$$

$$6 \begin{cases} 3x - 4y - 5z = 5 \\ 7z = 15 + y + 2x \\ x + 3y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 2z + 1 = 0 \\ y - 2 = x + z \\ 4x + 2z = -7 \end{cases}$$

$$[S = \{(1, -3, 2)\}; S = \left\{ \left(-2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}]$$

Sistemi letterali

$$7 \begin{cases} (a - b)x + y - z = 1 - a \\ 2x - y = \frac{2 - (a - b)(a + b)}{a - b} \\ (a^2 - b^2)x - 3y + 2z = 2a \end{cases}$$

$$[S = \left\{ \left(\frac{1}{a + b}, a + b, 2a + b \right) \right\}]$$

$$8 \begin{cases} x + (a - b)y = a + bz \\ ax + by + bz = a^2 + ab \\ ax - ay + bz = a^2 - b^2 \end{cases}$$

$$[S = \{(a, b, a - b)\}]$$

$$9 \begin{cases} \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 2z \\ x + y = (a + b)z \\ ax - by + 2abz = 2 \end{cases}$$

$$[S = \left\{ \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{ab} \right) \right\}]$$

$$10 \begin{cases} \frac{1}{x + 3a} - \frac{1}{x} = \frac{x + y}{x^2 + 3ax} \\ \frac{x + 2z}{y} + \frac{1}{2} = 0 \\ x - y + z = 2a \end{cases}$$

$$[S = \{(-a, -2a, a)\}]$$

$$11 \begin{cases} \frac{x + y - z}{4} = a \\ \frac{x + a}{x - 2a} + \frac{y - a}{x + 2a} = \frac{x^2 + xy + 2a^2}{x^2 - 4a^2} \\ \frac{2x + z - 3a}{y - a} = -2 \end{cases}$$

$$[S = \{(a, 2a, -a)\}]$$