Approfondimenti

Sistemi omogenei

Un sistema si dice **omogeneo** se le sue equazioni si possono scrivere come polinomi omogenei uguagliati a un numero d che può eventualmente anche essere nullo.
Fra tutti i sistemi omogenei ci occupiamo di quelli di quarto grado nei quali ciascuna equazione è di secondo grado; essi assumono pertanto la forma:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

Per esempio è omogeneo di quarto grado il sistema: $\begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 6 \\ 2x^2 - 5y^2 = 3 \end{cases}$

Per risolvere sistemi di questo tipo si segue un algoritmo particolare.

I caso: $d \neq 0 \ \vee \ d' \neq 0$

Se almeno uno dei valori d e d' è diverso da zero, la procedura da applicare è la seguente, che utilizziamo sul precedente sistema.

- ***I passo***

  Si utilizza un'incognita ausiliaria t e si opera la sostituzione $y = tx$:

  $$\begin{cases} x^2 - 3x \cdot tx - 4t^2x^2 = 6 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3tx^2 - 4t^2x^2 = 6 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases}$$

- ***II passo***

  Si raccoglie x^2 a fattor comune al primo membro: $\begin{cases} x^2(1 - 3t - 4t^2) = 6 \\ x^2(2 - 5t^2) = 3 \end{cases}$

- ***III passo***

  Se, come in questo caso, almeno uno dei due termini d è diverso da zero, si esegue la divisione membro a membro delle due equazioni ottenute (nel caso in cui uno dei termini d è zero, occorre lasciare questo termine al numeratore):

  $$\frac{x^2(1 - 3t - 4t^2)}{x^2(2 - 5t^2)} = \frac{6}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1 - 3t - 4t^2}{2 - 5t^2} = 2 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 3t - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2t^2 - t - 1 = 0$$

  Il sistema dato è quindi equivalente a quello che si ottiene associando la precedente equazione a una del sistema, scegliamo la seconda:

  $$\begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases}$$

- ***IV passo***

  Si risolve l'equazione in t del nuovo sistema: $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

■ ***V passo***

Otteniamo così i due sistemi:

- $\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2 - \dfrac{5}{4}x^2 = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

- $\begin{cases} t = 1 \\ 2x^2 - 5x^2 = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 1 \\ x^2 = -1 \end{cases}$ sistema impossibile

Tornando alla variabile y:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow \quad (-2,\ 1) \quad \vee \quad \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \quad (2,\ -1)$$

In definitiva, il sistema ha soluzioni $(2,\ -1),\ (-2,\ 1)$.

II caso: $d = d' = 0$

Descriviamo la procedura risolvendo il sistema $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 6xy + 5y^2 = 0 \end{cases}$

Possiamo dire che la coppia $(0,\ 0)$ soddisfa il sistema, quindi è una sua soluzione. Per trovare le altre, seguiamo una procedura simile a quella del caso precedente.

■ ***I passo***

Operiamo la sostituzione $y = tx$:

$$\begin{cases} 3x^2 + x \cdot tx - 2t^2x^2 = 0 \\ x^2 + 6x \cdot tx + 5t^2x^2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x^2 + tx^2 - 2t^2x^2 = 0 \\ x^2 + 6tx^2 + 5t^2x^2 = 0 \end{cases}$$

■ ***II passo***

Raccogliamo x^2 a fattor comune in entrambe le equazioni: $\begin{cases} x^2(3 + t - 2t^2) = 0 \\ x^2(1 + 6t + 5t^2) = 0 \end{cases}$

■ ***III passo***

Non possiamo questa volta dividere membro a membro le due equazioni perché l'espressione $\dfrac{0}{0}$ che otterremmo al secondo membro è priva di significato. Possiamo però applicare la legge di annullamento del prodotto dalla quale, tenendo presente che abbiamo già evidenziato la soluzione $x = 0$, otteniamo:

$$\begin{cases} 3 + t - 2t^2 = 0 \\ 1 + 6t + 5t^2 = 0 \end{cases}$$

Poiché le due equazioni sono in sistema, dobbiamo trovare le loro soluzioni comuni:

- $3 + t - 2t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$

- $1 + 6t + 5t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

La sola soluzione comune è $t = -1$.

IV passo

Tenendo presente la sostituzione fatta possiamo dire che il sistema è verificato da tutte le coppie (x, y) nella quali è $y = -x$, cioè da tutte le coppie della forma $(x, -x)$.

In definitiva, il sistema ammette infinite soluzioni, tutte della forma $(x, -x)$ fra cui anche la coppia $(0, 0)$.

Esercizi

1 Indica quali fra i seguenti sistemi sono omogenei:

a. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 4xy = 1 \\ 3x^2 + y^2 - xy = 2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x - y^2 + 2xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 4xy = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy = x \\ x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x^2 + 5y^2 + xy = -2 \\ x^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

2 Se si opera la sostituzione $y = xt$, il sistema omogeneo $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ x^2 - 4xy = 12 \end{cases}$ porta alla risoluzione dell'equazione:

a. $\dfrac{1+2t^2}{1-4t} = \dfrac{1}{2}$ **b.** $\dfrac{1+2t^2}{1-4t} + \dfrac{1}{2} = 0$ **c.** $\dfrac{1+2t^2-6}{1-4t-12} = 0$ **d.** $\dfrac{1-4t}{1+2t^2} = 2$

Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

3 **esercizio guidato**

$\begin{cases} 2x^2 - 4xy - 3y^2 = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$

Il sistema è omogeneo, operiamo quindi la soluzione $y = xt$: $\begin{cases} 2x^2 - 4tx^2 - 3t^2x^2 = 5 \\ x^2 + 2t^2x^2 = 5 \end{cases}$

Raccogliamo x^2 in entrambe le equazioni e, supposto $x \neq 0$, dividiamole membro a membro.

$$\begin{cases} x^2(2 - 4t - 3t^2) = 5 \\ x^2(1 + 2t^2) = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{2 - 4t - 3t^2}{1 + 2t^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 5t^2 + 4t - 1 = 0$$

Risolvendo questa equazione otteniamo $t_1 = -1 \ \vee \ t_2 = \dfrac{1}{5}$ e, ricordando la sostituzione operata $y = xt$, otteniamo i due sistemi

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{5}x \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

Risolvendoli, troviamo le soluzioni del sistema dato $\begin{cases} x = \mp\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm\dfrac{5}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ y = \pm\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases}$

e pertanto le soluzioni sono:

$$\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right); \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right); \left(\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right); \left(-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right).$$

4 $\begin{cases} x^2 - y^2 = -24 \\ xy + x^2 = 60 \end{cases}$ $[(5, 7); (-5, -7)]$

5 $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = \dfrac{7}{9} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{10}{9} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3}, -1\right); \left(1, -\frac{1}{3}\right); \left(-\frac{1}{3}, 1\right); \left(-1, \frac{1}{3}\right)\right]$

6 $\begin{cases} (2x + y)^2 = 4 \\ 4xy + y^2 = 3 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}, -3\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right); \left(-\frac{1}{2}, -1\right); \left(-\frac{1}{2}, 3\right)\right]$

7 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ y(x + y) = 10 \end{cases}$ $[(3, 2); (-3, -2)]$

8 $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases}$ $[(0, 0)]$

9 $\begin{cases} x^2 - xy = -14 \\ y^2 - xy = 63 \end{cases}$ $[(2, 9); (-2, -9)]$

10 $\begin{cases} (x + y)^2 = 5 - xy \\ xy = 1 \end{cases}$ $[(1, 1); (-1, -1)]$

11 $\begin{cases} x(2x - y) = 3 \\ \dfrac{x^2}{3} - 3y^2 = -\dfrac{9}{4} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{3}{2}, 1\right); \left(-\frac{3}{2}, -1\right); \left(\frac{6}{\sqrt{35}}, -\frac{11}{2\sqrt{35}}\right); \left(-\frac{6}{\sqrt{35}}, \frac{11}{2\sqrt{35}}\right)\right]$

12 $\begin{cases} y^2 - 2xy = 0 \\ y^2 + xy - x^2 = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right); \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right]$

13 $\begin{cases} y^2 + 2xy = 1 \\ 4x^2 + xy + y^2 = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\sqrt{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

14 $\begin{cases} y^2 - x^2 = 27 \\ xy - x^2 = 9 \end{cases}$ $[(3, 6); (-3, -6)]$

15 $\begin{cases} x^2 - 7xy + 12y^2 = 0 \\ x^2 - xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(x, \frac{1}{3}x\right)\right]$

16 $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{2} \\ x(x - 3y) = \dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right); \left(\frac{7}{\sqrt{26}}, -\frac{2}{\sqrt{26}}\right); \left(-\frac{7}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}\right)\right]$

17 $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 8xy + 15y^2 = 0 \end{cases}$ $[(0, 0)]$

18 $\begin{cases} 3x^2 + 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy - y^2 = -2 \end{cases}$ $\left[\left(\pm\frac{\sqrt{34}}{17}, \mp\frac{3\sqrt{34}}{17}\right); \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}, \mp\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right]$

19 $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = 4 \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 1 \end{cases}$ $\left[\left(\pm\frac{5\sqrt{6}}{6}, \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]$

20 $\begin{cases} x^2 + 2xy + 11y^2 = 10 \\ x^2 - 9y^2 = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\pm\frac{4\sqrt{14}}{7}, \pm\frac{\sqrt{14}}{7}\right); \left(\pm\frac{7\sqrt{26}}{13}, \mp\frac{2\sqrt{26}}{13}\right)\right]$

21 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 13 \\ (x+y)^2 - 2y(x+y) = 3 \end{cases}$ $[(\pm 2, \ \pm 1)]$