MATEMATICA *per* TUTTI

Le equazioni e le disequazioni lineari

Le equazioni lineari

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le equazioni. Chiamiamo equazione ad una incognita un'uguaglianza fra due espressioni algebriche di cui almeno una contenente una lettera (generalmente indicata con x), per la quale si ricercano i valori che rendono vera l'uguaglianza. Ciascuno di questi valori si dice che è **soluzione** dell'equazione.
Inoltre, diciamo che due equazioni sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni. Ad esempio sono equivalenti le equazioni

$$3x = 3 \qquad \text{e} \qquad x - 1 = 0 \qquad \text{perché entrambe hanno soluzione} \qquad x = 1$$

Per risolvere un'equazione si deve allora cercare di passare da una forma ad una più semplice che sia ad essa equivalente, fino a scrivere l'equazione nella forma $x =$ ..... che esprime il valore della soluzione cercata. Ricordiamo allora che, in base ai principi di equivalenza:

- si può spostare un termine da una parte all'altra dell'uguale cambiandogli segno
- si possono elidere i termini uguali che compaiono in entrambi i membri dell'equazione
- si può cambiare segno a tutti i termini di un'equazione
- si può semplificare l'equazione dividendo per un fattore comune ai due membri
- si può passare da un'equazione a coefficienti frazionari ad una a coefficienti interi moltiplicando i due membri per il *m.c.m.* fra i denominatori.

Tenendo conto delle osservazioni fatte, risolviamo le seguenti equazioni di primo grado (o lineari):

a. $3 + 2(5x - 2) + 4(2 - x) = 8$

Svolgiamo i calcoli e riduciamo i termini simili:

$3 + 10x - 4 + \cancel{8} - 4x = \cancel{8}$ eliminiamo i fattori uguali nei due membri

$6x - 1 = 0$

$6x = 1$ abbiamo spostato il termine noto al secondo membro cambiandogli segno

$\dfrac{6x}{6} = \dfrac{1}{6}$ abbiamo diviso per il coefficiente di x

$x = \dfrac{1}{6}$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \left\{\dfrac{1}{6}\right\}$.

b. $\frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{4}(x+2)=7$

Calcoliamo subito il *m.c.m.* fra i denominatori $\frac{6(x-1)+(x+2)}{4}=\frac{28}{4}$

Moltiplichiamo per 4 entrambi i membri dell'equazione e svolgiamo i calcoli:

$\cancel{4}\cdot\frac{6x-6+x+2}{\cancel{4}}=\frac{28}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}$

$7x-4=28$

$7x=28+4$

$\frac{7x}{7}=\frac{32}{7}$

$x=\frac{32}{7}$

$S=\left\{\frac{32}{7}\right\}.$

c. $\frac{5}{6}x+3=1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x+7\right)$

$\cancel{6}\cdot\frac{5x+18}{\cancel{6}}=\frac{6+4x+x+21}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6}$

$\cancel{5}x+18=\cancel{5}x+27$

$18=27$

Poiché 18 non è uguale a 27, l'uguaglianza ottenuta è falsa per qualsiasi valore di x; si dice che l'equazione è **impossibile** e quindi $S=\varnothing$.

d. $2(x-1)+x=3(x-2)+4$

Svolgiamo i calcoli:

$2x-2+x=3x-6+4$

$\cancel{3}x-\cancel{2}=\cancel{3}x-\cancel{2}$

$0=0$

Poiché $0=0$ è un'uguaglianza vera per qualsiasi valore di x, l'equazione ammette infinite soluzioni e si dice che è **indeterminata**: $S=R$.

2 Risolvi le seguenti equazioni:

a. $\frac{x-5}{4}+3=4+\frac{3-x}{2}$

b. $\frac{3x-1}{5}-\frac{x-3}{8}-2=\frac{11x-19}{16}$

c. $\frac{1}{2}(x+1)^2-(2x-3)=\frac{1}{2}(x^2+7-2x)$

d. $6x-\frac{1}{4}(2x+1)-1=\frac{1}{2}\left(11x-\frac{1}{2}\right)$

e. $\frac{x+2}{3}-(x+2)^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}(x-3)-(x-2)^2$

f. $\frac{x-2}{2}-\frac{1}{4}x+1=-2x$

g. $\frac{6x-9}{18}-\frac{3x-6}{6}=\frac{1-2x}{3}$ (attento: le prime due frazioni si possono semplificare)

3 Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme assegnato:

a. $\dfrac{3(x-2)}{5}+\dfrac{2(x-1)}{10}=\dfrac{x-4}{2}$ in Z

La soluzione dell'equazione è $x=-2$ e poiché $-2 \in Z$, $S=\{-2\}$.

b. $-2x(x^2-1)-\dfrac{x+2}{2}=-2x^3+4(x+1)$ in N

La soluzione dell'equazione è $x=-2$ e poiché $-2 \notin N$, $S=\varnothing$.

c. $\dfrac{4x+3}{2}-\dfrac{2(x-1)}{3}=2+x$ in Z

d. $\dfrac{3(x+1)}{2}-\dfrac{5x-1}{3}=x-2$ in R

Le disequazioni lineari

4 **ESERCIZIO SVOLTO**

La risoluzione di una disequazione lineare si basa su alcuni principi che ricordiamo:

- come nelle equazioni, si può trasportare un termine da un membro all'altro cambiandogli segno; il verso della disequazione rimane in questo caso invariato
- si possono moltiplicare o dividere entrambi i membri della disequazione per un numero positivo ed il verso della disequazione rimane invariato
- si possono moltiplicare o dividere entrambi i membri della disequazione per un numero negativo ma in questo caso si deve cambiare anche il verso della disequazione.

Risolviamo per esempio la disequazione $(x+1)^2-4x>x^2-5$

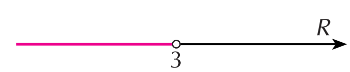
Svolgiamo i calcoli $x^2+2x+1-4x>x^2-5 \quad \rightarrow \quad -2x+1>-5$

Trasportiamo a destra i termini senza la x: $-2x>-5-1 \quad \rightarrow \quad -2x>-6$

Dividiamo entrambi i membri per -2 ricordando di cambiare verso alla disequazione

$$x<3$$

La rappresentazione grafica dell'insieme delle soluzioni di una disequazione è data dalla semiretta in colore nella figura a lato.



5 $3(x-1)-6<2(x-12)$

6 $2(x-1)(x+1)>2x^2-3(x+4)$

7 $3x-2(5x+4)<x-20$

8 $3(x+1)^2-2x>3(x^2-1)$

9 $(x-2)^2-4(x+1)\geq x^2+16$

10 $\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{3}(x+1) \leq -\frac{3}{4}$

(Suggerimento: calcola il *m.c.m.* fra i denominatori ed eliminalo dalla disequazione moltiplicando entrambi i membri per tale valore)

11 $\frac{x-1}{5}+\frac{3x-2}{10} \leq \frac{6x-1}{10}$

12 $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 < x+1$

13 **ESERCIZIO SVOLTO**

Risolvere un **sistema di disequazioni** significa chiedersi quando tutte le disequazioni sono verificate contemporaneamente; conviene perciò procedere in questo modo:

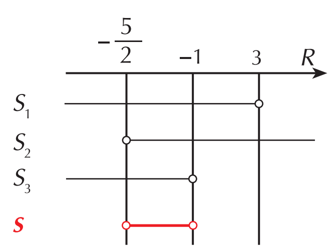
- calcolare l'insieme delle soluzioni di ciascuna disequazione
- costruire la tabella delle soluzioni che indichi in modo grafico tali insiemi
- trovare l'intersezione di questi insiemi andando a vedere in quali intervalli le disequazioni sono tutte verificate.

Per esempio, risolviamo il sistema: $\begin{cases} x-3<0 \\ 2x+5>0 \\ x+1<0 \end{cases}$

Risolviamo ciascuna disequazione:

- $x-3<0$ se $x<3$ $\leftarrow S_1$
- $2x+5>0$ se $x>-\frac{5}{2}$ $\leftarrow S_2$
- $x+1<0$ se $x<-1$ $\leftarrow S_3$

Costruiamo la tabella delle soluzioni:



Tutte le disequazioni sono verificate nell'intervallo $-\frac{5}{2}<x<-1$ che è perciò l'insieme delle soluzioni del sistema.

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

14 $\begin{cases} 3x-1<5 \\ 2x+7<3(x-2)+12 \end{cases}$

15 $\begin{cases} (x-1)(x+2)>x^2-3 \\ 3(x+1)-8<x \end{cases}$

16 $\begin{cases} x-5>0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ x-7<2x+4 \end{cases}$

17 $\begin{cases} (x+1)^2-5<x^2+4 \\ 3x+\dfrac{1}{2}>0 \\ 4x+5>7 \end{cases}$

Risultati di alcuni esercizi.

2. **a.** $S=\{5\}$; **b.** $S=\{-3\}$; **c.** indeterminata, $S=Q$; **d.** impossibile, $S=\varnothing$; **e.** $S=\left\{\dfrac{7}{50}\right\}$; **f.** $S=\{0\}$; **g.** $S=\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

3. **c.** $S=\varnothing$; **d.** $S=\left\{\dfrac{23}{7}\right\}$

5. $x<-15$

6. $x>-\dfrac{10}{3}$

7. $x>\dfrac{3}{2}$

8. $x>-\dfrac{3}{2}$

9. $x \leq -2$

10. $x \leq -\dfrac{10}{7}$

11. $x \geq -3$

12. $\forall x \in R$

14. $1<x<2$

15. $-1<x<\dfrac{5}{2}$

16. $x>5$

17. $\dfrac{1}{2}<x<4$