

Il metodo di Cramer per i sistemi con tre incognite

Il metodo di Cramer può essere usato anche per questo tipo di sistemi e la procedura di calcolo è analoga a quella imparata per i sistemi di due equazioni; vediamo come procedere considerando il sistema

$$\begin{cases} y + x - z - 3 = 0 \\ x - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \\ 2z - y + 3x - 5 = 0 \end{cases}$$

Scriviamolo innanzi tutto in forma normale mettendo prima le x , poi le y , da ultimo le z e trasportando i termini noti al secondo membro:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 3y = 1 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Scriviamo adesso la matrice dei coefficienti del sistema scrivendo nell'ordine la colonna dei coefficienti di x , quella dei coefficienti di y e da ultimo quella dei coefficienti di z (nella seconda equazione la z non c'è e dobbiamo scrivere 0 come coefficiente):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per calcolare il determinante di questa matrice si procede in questo modo:

- si riscrivono le prime 2 colonne accanto alla matrice; nel nostro caso otteniamo

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}$$

- si calcola la differenza tra la somma algebrica dei prodotti dei numeri lungo le diagonal principali (segnate in rosso) e la somma algebrica dei prodotti dei numeri lungo le diagonal secondarie (segnate in blu)

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}$$

$$= [1 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1)] - [3 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1] =$$

$$= [-6 + 2] - [9 + 4] = -4 - 13 = -17. \text{ Dunque } D = -17.$$

Calcoliamo adesso il determinante D_x della matrice che si ottiene sopprimendo la colonna x della matrice dei coefficienti e sostituendola con quella dei termini noti:

colonna dei termini noti

$$D_x = \begin{array}{ccc|cc} \downarrow & & & & \\ \mathbf{3} & 1 & -1 & 3 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 5 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= [3 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1)] - [5 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1] = \\ &= [-18 + 1] - [15 + 2] = -17 - 17 = -34 \end{aligned}$$

Analogamente, calcoliamo Δ_y e Δ_z .

colonna dei termini noti

$$D_y = \begin{array}{ccc|cc} \downarrow & & & & \\ 1 & \mathbf{3} & -1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

$$= [1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 5] - [3 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3] = -8 - 9 = -17$$

colonna dei termini noti

$$D_z = \begin{array}{ccc|cc} \downarrow & & & & \\ 1 & 1 & \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \hline 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ \hline 3 & -1 & 5 & 3 & -1 \end{array}$$

$$= [1 \cdot (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-1)] - [3 \cdot (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 1] = -18 + 18 = 0$$

Allora, essendo $D \neq 0$ la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \\ z = \frac{D_z}{D} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \frac{-34}{-17} = 2 \\ y = \frac{-17}{-17} = 1 \\ z = \frac{0}{-17} = 0 \end{cases} \quad \text{quindi } (2, 1, 0).$$

Esercizi

Il metodo di Cramer per i sistemi con tre incognite

1 esercizio guidato

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 15 \\ 6x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + 7y = -18 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di Cramer e calcoliamo i tre determinanti:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{-4} & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{-4} \\ 6 & -3 & 2 & 6 & -3 \\ \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{7} \end{vmatrix}$$

$$= [3 \cdot (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7] - [4 \cdot (-3) \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot (-4)] = 196$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 15 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ -18 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{15} & \cancel{-4} & \cancel{5} & \cancel{15} & \cancel{-4} \\ 4 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ \cancel{-18} & \cancel{7} & \cancel{0} & \cancel{-18} & \cancel{7} \end{vmatrix}$$

$$= [15 \cdot (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 2 \cdot (-18) + 5 \cdot 4 \cdot 7] - [(-18) \cdot (-3) \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \cdot (-4)] = -196$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & -18 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{15} & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{15} \\ 6 & 4 & 2 & 6 & 4 \\ \cancel{4} & \cancel{-18} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-18} \end{vmatrix}$$

$$= [3 \cdot 4 \cdot 0 + 15 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot (-18)] - [4 \cdot 4 \cdot 5 + (-18) \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot 15] = -392$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 15 \\ 6 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{-4} & \cancel{15} & \cancel{3} & \cancel{-4} \\ 6 & -3 & 4 & 6 & -3 \\ \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{-18} & \cancel{4} & \cancel{7} \end{vmatrix}$$

$$= [3 \cdot (-3) \cdot (-18) + (-4) \cdot 4 \cdot 4 + 15 \cdot 6 \cdot 7] - [4 \cdot (-3) \cdot 15 + 7 \cdot 4 \cdot 3 + (-18) \cdot 6 \cdot (-4)] = 392$$

Poichè $D \neq 0$, il sistema è determinato ed ha soluzione:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-196}{196} = -1 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-392}{196} = -2 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{392}{196} = 2 \quad [(-1, -2, 2)]$$

2

$$\begin{cases} 3x + y - 6z = 16 \\ x - 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = -6 \end{cases}$$

$$\left[(4, -2, -1); \left(\frac{1}{2}, -1, 2 \right) \right]$$

3

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 3y + 12 = x + z \\ 3x - 11 = y - 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 + 3z \\ 7x = 12 - 2y \\ 5x - 4z = 6 \end{cases}$$

$$[(2, -3, 1); (2, -1, 1)]$$

4

$$\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 3x + y = -3 - 2z \\ 2x - 1 = y + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + z = \frac{3}{2}(y - z + 1) \\ 2y - 5z = x - 1 \end{cases}$$

$$[(0, 1, -2); (3, 1, 0)]$$

$$5 \quad \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x - y + 2z = -5 \\ 3x - 1 = -(2z + y) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4y = 2z - 3 \\ 2x - 2y = -1 \\ 2x + z = -1 \end{cases} \quad \left[(0, 3, -1); \left(-\frac{3}{2}, -1, 2\right) \right]$$

$$6 \quad \begin{cases} 3x - 4y - 5z = 5 \\ 7z = 15 + y + 2x \\ x + 3y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y - 2z + 1 = 0 \\ y - 2 = x + z \\ 4x + 2z = -7 \end{cases} \quad \left[(1, -3, 2); \left(-2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]$$

Sistemi letterali

$$7 \quad \begin{cases} (a - b)x + y - z = 1 - a \\ 2x - y = \frac{2 - (a - b)(a + b)}{a - b} \\ (a^2 - b^2)x - 3y + 2z = 2a \end{cases} \quad \left[\left(\frac{1}{a + b}, a + b, 2a + b\right) \right]$$

$$8 \quad \begin{cases} x + (a - b)y = a + bz \\ ax + by + bz = a^2 + ab \\ ax - ay + bz = a^2 - b^2 \end{cases} \quad [(a, b, a - b)]$$

$$9 \quad \begin{cases} \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 2z \\ x + y = (a + b)z \\ ax - by + 2abz = 2 \end{cases} \quad \left[\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{ab}\right) \right]$$

$$10 \quad \begin{cases} \frac{1}{x + 3a} - \frac{1}{x} = \frac{x + y}{x^2 + 3ax} \\ \frac{x + 2z}{y} + \frac{1}{2} = 0 \\ x - y + z = 2a \end{cases} \quad [(-a, -2a, a)]$$

$$11 \quad \begin{cases} \frac{x + y - z}{4} = a \\ \frac{x + a}{x - 2a} + \frac{y - a}{x + 2a} = \frac{x^2 + xy + 2a^2}{x^2 - 4a^2} \\ \frac{2x + z - 3a}{y - a} = -2 \end{cases} \quad [(a, 2a, -a)]$$