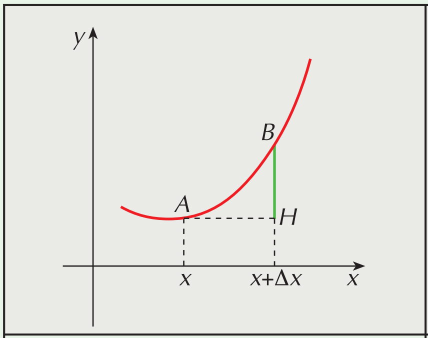
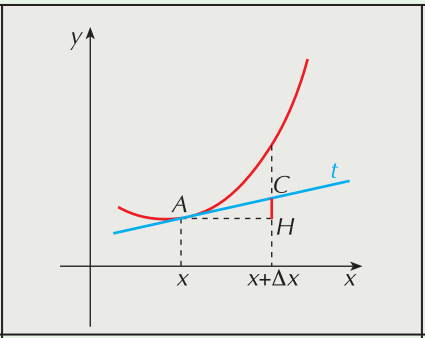
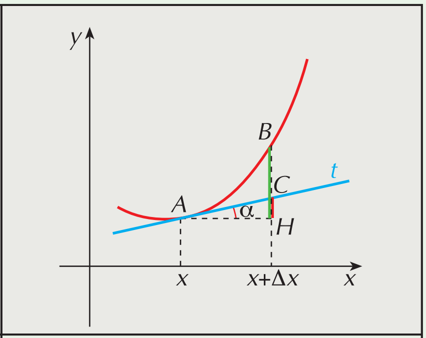
Il differenziale di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione derivabile e quindi continua in un intervallo $[a, b]$ e sia x un punto di tale intervallo. Diamo un incremento Δx alla variabile indipendente x e passiamo dal punto A di ascissa x al punto B di ascissa $x + \Delta x$.
In questo passaggio la funzione passa dal valore $f(x)$ al valore $f(x + \Delta x)$, subisce cioè un incremento dato dalla misura con segno del segmento HB.

		
HB è l'incremento subito dalla funzione nel passaggio da x a $x + \Delta x$	HC è l'incremento subito dalla retta tangente nel passaggio da x a $x + \Delta x$	se Δx è piccolo, anche la differenza tra HB e HC è piccola

Tracciamo adesso la retta t tangente in A; nel passaggio da x a $x + \Delta x$ essa subisce un incremento dato dalla misura con segno del segmento HC.
La misura del segmento HC si può valutare applicando il secondo teorema sui triangoli rettangoli; posto $\widehat{HAC} = \alpha$ si ha che:

$$\overline{HC} = \overline{AH} \cdot \tan \alpha \qquad \text{cioè} \qquad \overline{HC} = \Delta x \cdot f'(x)$$

All'espressione $f'(x) \cdot \Delta x$ diamo il nome di **differenziale della funzione f relativo al punto x**; il differenziale viene indicato con il simbolo $df(x)$:

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot \Delta x}$$

Il differenziale di una funzione in un punto x rappresenta quindi l'incremento subito dalla variabile dipendente nel passaggio da x a $x + \Delta x$ valutato lungo la retta tangente anziché lungo la curva.
Come già osservato nella terza figura precedente, se Δx è piccolo, la differenza tra l'incremento subito dalla f e l'incremento valutato lungo la tangente è anch'esso piccolo. Il differenziale può quindi essere utilizzato per avere una valutazione approssimata del valore di una funzione in un punto.

Esempio.

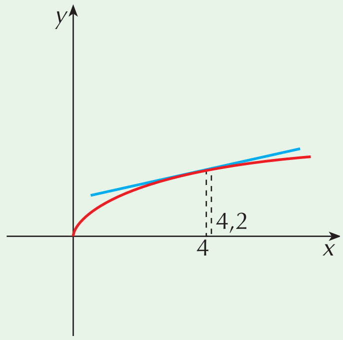
Calcoliamo il differenziale della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 4$ relativamente ad un incremento $\Delta x = 0{,}2$.

Essendo $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ il differenziale della funzione in un punto generico x è dato dall'espressione

$$df(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x$$

In $x = 4$ e per $\Delta x = 0{,}2$ il differenziale è uguale a $df(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}2 = 0{,}05$.

Questo numero rappresenta l'incremento della variabile dipendente y nel passaggio da $x = 4$ a $x = 4{,}2$ valutato lungo la retta tangente alla curva in $x = 4$.
Come si vede anche dal disegno, la differenza tra l'incremento calcolato lungo la curva e quello calcolato lungo la tangente è quasi impercettibile.



Possiamo quindi dire che un valore approssimato di $\sqrt{4{,}2}$ è la somma di 2 (cioè $\sqrt{x}$ calcolato in $x = 4$) con 0,05, cioè 2,05.

Il valore di $\sqrt{4{,}2}$ valutato con una calcolatrice è 2,04939...

Come si vede la differenza è molto piccola.

Il differenziale e la derivata

Calcoliamo il differenziale della funzione $f(x) = x$:

$$df(x) = 1 \cdot \Delta x \quad \text{cioè} \quad dx = \Delta x$$

In altre parole, il differenziale della variabile indipendente x è uguale a Δx.
Questa considerazione ci permette di scrivere il differenziale di una funzione f qualsiasi nella forma

$$df(x) = f'(x) \cdot dx \quad \text{da cui ricaviamo che} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

In altre parole:

la derivata di una funzione $f(x)$ è il rapporto tra il differenziale della funzione f e il differenziale della variabile indipendente x.

ESERCIZI

Trova il differenziale delle seguenti funzioni in un punto qualsiasi x del loro dominio.

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = x^2 - 4x + 1$

Il differenziale di una funzione è il prodotto della derivata della funzione per il differenziale dx della variabile indipendente:

$$dy = (2x - 4)dx$$

2 $y = 3x^2 - 2x + 1$ $[dy = (6x - 2)\, dx]$

3 $y = x^5 - 4x^3$ $[dy = (5x^4 - 12x^2)dx]$

4 $y = -x^3 + 4x^2$ $[dy = (-3x^2 + 8x)\, dx]$

5 $y = x + \ln x$ $\left[dy = \dfrac{1+x}{x}\, dx\right]$

6 $y = x - e^{-x}$ $[dy = (1 + e^{-x})\, dx]$

7 $y = x^2 - x \ln x$ $[dy = (2x - 1 - \ln x)\, dx]$

8 $y = x \cos x$ $\quad [dy = (\cos x - x \sin x)\, dx]$

9 $y = \dfrac{x \ln x}{x-1}$ $\quad \left[dy = \dfrac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2} dx\right]$

10 $y = e^{x^2+1}$ $\quad \left[dy = \left(2x\, e^{x^2+1}\right) dx\right]$

11 $y = \sqrt{1-2x}$ $\quad \left[dy = -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}} dx\right]$

12 $y = x \cdot e^{\sqrt{x}}$ $\quad \left[dy = e^{\sqrt{x}}\left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) dx\right]$

Trova il differenziale delle seguenti funzioni nel punto indicato.

13 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = x^3 - 5x \qquad$ in $x = 2$

Il differenziale in un punto x è: $\qquad dy = (3x^2 - 5)dx$

Nel punto $x = 2$ troviamo che: $\qquad dy = 7dx$

14 $y = x^3 - 5x + 2$ $\quad$ in $x_0 = 1$ $\quad [dy = -2dx]$

15 $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$ $\quad$ in $x_0 = 3$ $\quad \left[dy = \dfrac{5}{49} dx\right]$

16 $y = \sqrt{x^2 - 2}$ $\quad$ in $x_0 = 2$ $\quad [dy = \sqrt{2}dx]$

17 $y = \ln (x^2 - 3)$ $\quad$ in $x_0 = -2$ $\quad [dy = -4dx]$

18 $y = e^x + 2x$ $\quad$ in $x_0 = 1$ $\quad [dy = (e+2)dx]$

19 $y = \ln \sqrt{x+1}$ $\quad$ in $x_0 = 0$ $\quad \left[dy = \dfrac{1}{2} dx\right]$

20 $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-3}$ $\quad$ in $x_0 = \dfrac{1}{2}$ $\quad \left[dy = -\dfrac{3\sqrt{10}}{25} dx\right]$

Per ciascuna delle seguenti funzioni, calcola il differenziale relativo ai punti ed all'incremento indicati.

21 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = 4x^2 - x \qquad x_0 = 1 \qquad \Delta x = 0{,}01$

Calcoliamo il differenziale della funzione: $\quad dy = (8x - 1)dx$

Il valore richiesto si ottiene sostituendo 1 al posto di x e 0,01 al posto di dx; abbiamo così

$$dy = 7 \cdot 0{,}01 = 0{,}07$$

22 $y = \dfrac{1}{1+x}$ $\quad x_0 = 0 \quad \Delta x = 10^{-4}$ $\quad [dy = -10^{-4}]$

23 $y = e^{2x}$ $\quad x_0 = 0 \quad \Delta x = 0{,}3$ $\quad [dy = 0{,}6]$

24 $y = e^{x^2}$ $\quad x_0 = 1 \quad \Delta x = 10^{-3}$ $\quad [dy = 0{,}0054]$

25 $y = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 4 \quad \Delta x = 10^{-1}$ $\quad [dy = 0{,}025]$

Calcola un valore approssimato delle seguenti espressioni esplicitando l'algoritmo utilizzato. Confronta poi il valore da te trovato con quello ottenuto usando una calcolatrice e stima l'errore di approssimazione.

26 **ESERCIZIO GUIDATO**

$e^{0,3}$

Sapendo che $e^0 = 1$, possiamo trovare il valore richiesto determinando come varia la funzione e^x nel passaggio da $x = 0$ a $x + \Delta x = 0 + 0,3$.
Un valore approssimato di tale variazione è dato dal differenziale della funzione nel punto 0 relativamente all'incremento 0,3. Abbiamo dunque che

$$dy = e^x\, dx \quad \text{nel nostro caso è} \quad dy = e^0 \cdot 0,3 = 0,3 \quad \text{quindi} \quad e^{0,3} = 1 + 0,3 = 1,3$$

Il valore restituito dalla calcolatrice è 1,3498588; l'errore commesso è dell'ordine di 10^{-2}.

27 $\sqrt{37}$ [≈ 6,0833...]

28 $\sin(0,5)$ [≈ 0,5]

29 $\log_3(9,01)$ [≈ 2,0101254]

30 $\cos^2(1,8)$ [≈ 0,052534324]

31 $\ln(0,98)$ [$-0,02$]

32 Calcola la variazione dell'area di un quadrato di lato x in corrispondenza della variazione Δx del lato stesso. [$2x\,\Delta x$]

33 Calcola la variazione del volume di una sfera di raggio r, quando quest'ultimo subisce un incremento Δr. [$4\pi r^2 \Delta r$]

34 Calcola di quanto varia l'area S di un trapezio rettangolo circoscritto a una circonferenza di raggio $r = 6\text{m}$ e avente la base maggiore di lunghezza 15m, quando il raggio ha un incremento $\Delta r = 2 \cdot 10^{-3}\text{m}$. $\left[\Delta S = \frac{1}{12}\text{m}^2\right]$