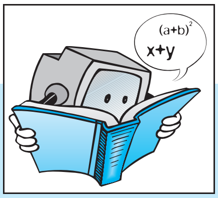
10

LE EQUAZIONI



Per ricordare

★ Molti problemi possono essere rappresentati sinteticamente mediante una relazione di uguaglianza fra due espressioni algebriche; per esempio, se un quadrato ha lo stesso perimetro di un rettangolo i cui lati misurano 6 e 12, il suo lato, che indichiamo con x, deve essere tale da soddisfare la relazione

$$4x = 2(6 + 12)$$

Le relazioni di uguaglianza fra due espressioni algebriche si dicono **equazioni**; esse, in generale, non sono vere per qualunque valore attribuito alle lettere che vi compaiono, ma diventano tali solo se alle lettere si attribuiscono numeri particolari; questi numeri rappresentano le **soluzioni** o **radici** dell'equazione.
I numeri che si possono attribuire alle lettere di un'equazione, indipendentemente dal fatto che rendano vera o meno l'uguaglianza, costituiscono il suo **dominio**.
Relativamente al precedente esempio, l'equazione ha per dominio l'insieme dei numeri razionali positivi perchè il lato di un quadrato non può avere misura negativa, il solo valore di x che rende vera l'uguaglianza è 9 e diciamo allora che 9 è la soluzione dell'equazione.
A seconda del numero di soluzioni, le equazioni si possono classificare in:

- equazioni **determinate**, se hanno un numero finito di soluzioni: $x - 3 = 0$ ha soluzione 3
- equazioni **indeterminate**, se hanno infinite soluzioni: $2x + 4 = 2(x + 2)$ qualunque numero è soluzione
- equazioni **impossibili**, se non hanno soluzioni: $4x - 1 = 4x + 2$ nessun numero è soluzione.

★ In una equazione, le lettere di cui si vogliono trovare i valori che rendono vera l'uguaglianza si chiamano **incognite**. In questa unità ci occupiamo di risolvere le equazioni che hanno una sola incognita, che indicheremo generalmente con x. Tutte le altre lettere che eventualmente troveremo in un'equazione saranno considerate come delle costanti arbitrarie (parametri).
Un'equazione è di grado n se n è il grado massimo con cui compare l'incognita:

- $x - 3 = 2x + 1$ è un'equazione di primo grado
- $3x - x^2 = 2(x - 1)$ è un'equazione di secondo grado
- $x^2 + 2x = 4 - x^3$ è un'equazione di terzo grado

★ Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni:

$$\left.\begin{array}{ll} x - 8 = 1 & \text{ha soluzione } 9 \\ 2x = 18 & \text{ha soluzione } 9 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{le due equazioni sono equivalenti}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x - 2 = 0 & \text{ha soluzione } 2 \\ x(x - 2) = 0 & \text{ha soluzione } 0 \text{ e } 2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{le due equazioni non sono equivalenti}$$

Risolvere un'equazione significa trovare le sue soluzioni e per fare questo si applicano due teoremi che permettono, in sostanza, di passare da un'equazione ad un'altra ad essa equivalente e che per questo vengono detti **principi di equivalenza**.

- **Primo principio di equivalenza.**
  Se ai due membri di un'equazione si aggiunge o si toglie una stessa espressione, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.
- **Secondo principio di equivalenza.**
  Se i due membri di un'equazione vengono moltiplicati o divisi per una stessa espressione **non nulla**, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.

Considerazione comune ai due principi è che l'espressione che si aggiunge o si toglie, per cui si moltiplica o si divide, deve avere almeno lo stesso dominio di quella data.

Le conseguenze di questi due principi sono le seguenti:

- si può spostare un termine da un membro all'altro dell'equazione se gli si cambia segno:
  $3x - 4 = 6 \quad \rightarrow \quad 3x = 6 + 4$
- si possono trasportare tutti i termini al primo membro uguagliando a zero l'espressione ottenuta:
  $3x + 4 = 6x - 2 \quad \rightarrow \quad 3x + 4 - 6x + 2 = 0$
- termini uguali nei due membri di un'equazione si possono eliminare:
  $2x - 5 \cancel{+x} = 3 \cancel{+x} \quad \rightarrow \quad 2x - 5 = 3$
- fattori comuni ai due membri di un'equazione possono essere semplificati:
  $4x - 6 = 8x + 4 \quad \rightarrow \quad 2x - 3 = 4x + 2$ abbiamo diviso per 2.
- si può cambiare segno a tutti i termini di un'equazione (in entrambi i membri):
  $-x - 1 = -5x + 2 \quad \rightarrow \quad x + 1 = 5x - 2$
- si può passare da un'equazione a coefficienti frazionari ad una a coefficienti interi moltiplicando entrambi i membri per il *m.c.m.* fra i denominatori:

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = x + \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = \left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot 4 \quad \rightarrow \quad 2x - 3 = 4x + 10$$

★ Un'equazione che contiene una sola lettera, che rappresenta quindi l'incognita, è un'equazione **numerica**; se contiene altre lettere si dice **letterale**.
Inoltre, se l'incognita di un'equazione compare solo al numeratore si parla di equazione **intera**; se invece l'incognita si trova anche in qualche denominatore, si parla di equazione **frazionaria**.

- $\dfrac{2(x-1)}{4} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{2}x - 3$ è un'equazione numerica intera
- $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{3}{4}$ è un'equazione numerica frazionaria
- $\dfrac{ax+2}{a} = a(x-3) + 2a$ è un'equazione letterale intera (al denominatore c'è la lettera a che non è l'incognita)
- $\dfrac{2x-1}{x+a} - 1 = \dfrac{2x+3}{x-a} + \dfrac{3}{4}a$ è un'equazione letterale frazionaria

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

Stabilisci quali fra le equazioni **a.**, **b.** *e* **c.** *sono equivalenti a quella data ed in base a quale principio.*

1 $3x - 6 = 2x + 4$

a. $3x - 2x - 6 = 4$ **b.** $\frac{3x-6}{3} = \frac{2x+4}{3}$ **c.** $\frac{3x-6}{3} = \frac{2x+4}{2}$ [**a.**, **b.**]

2 $2x + 1 = x$

a. $2x^2 + x = x^2$ **b.** $2x - x = 1$ **c.** $2x = x - 1$ [**c.**]

3 $\frac{4x-2}{3} = \frac{x+1}{2}$

a. $3 \cdot \frac{4x-2}{3} = \frac{x+1}{2} \cdot 2$ **b.** $6 \cdot \frac{4x-2}{3} = \frac{x+1}{2} \cdot 6$ **c.** $\frac{4x-2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}$ [**b.**, **c.**]

4 $7x - 3 = -2x - 3$

a. $7x = -2x$ **b.** $7x + 2x = -3 - 3$ **c.** $3 - 7x = 2x + 3$ [**a.**, **c.**]

Risolvi le seguenti equazioni numeriche intere in Q.

5 **ESERCIZIO SVOLTO**

$4x + 6 = 2(2 - x) - 4$

Eseguiamo dapprima i calcoli ai due membri dell'equazione:

$$4x + 6 = 4 - 2x - 4 \qquad \rightarrow \qquad 4x + 6 = -2x$$

Applicando il primo principio di equivalenza trasportiamo i termini con l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo:

$$4x + 2x = -6 \qquad \rightarrow \qquad 6x = -6$$

Applicando il secondo principio di equivalenza dividiamo entrambi i membri per 6 e troviamo la soluzione:

$$\frac{6x}{6} = \frac{-6}{6} \qquad \rightarrow \qquad x = -1$$

6 $x + 2(x + 1) = 1 + 3(1 - x)$ $\left[S = \left\{\frac{1}{3}\right\}\right]$

7 $(x - 1)^2 + x = (x + 1)(x + 2) - 1$ $[S = \{0\}]$

8 $3x - 2(x + 2)^2 + 3x^2 = (x - 1)(x + 1) + 3$ $[S = \{-2\}]$

9 $(x - 3)(x + 1) = (x - 1)^2 + 4$ $[S = \emptyset]$

10 $4x - 3(x + 1) + (2x - 1)^2 = 2(x + 1)(2x + 1) - 4x + 1$ $[S = \{-1\}]$

11 $5x - x^2(x - 4) = (2x + 1)^2 - x^3 - [3(x - 1) - x] + 2$ $[S = \{2\}]$

12 $(x + 2)(3x - 1) - (-2) + 3[x - (2 - 2x)] = x(2x + 3) + 2x + (x + 1)(x - 1)$ $\left[S = \left\{\frac{5}{9}\right\}\right]$

13 $(x+3)^2-(x+1)^2=4(x+2)$ $[S=\mathbb{Q}]$

14 $(x+1)(x-2)(3x+1)-3(x-1)^3+5x=3x^2+(2x+1)^2+5$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}\right]$

15 $(5x-2)(3-x)-x^3-13x+6=(x+5)^2+4-(x+2)^3$ $\left[S=\left\{\frac{7}{2}\right\}\right]$

16 $(3x-2)^2+(x-1)(x+1)=5x(2x+1)-3[2(x-1)-(-1)]$ $[S=\{0\}]$

17 $10+8x(x^2+1)-[4(x-1)-3(2x-1)]+(x+1)^2=(2x+1)^3+8-\left[(3x+2)^2+2x(x-2)\right]$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right]$

18 $(x+1)(x-1)^2-(-3)+(x-2)\left[2x^2-(x+2)(2x-1)\right]=(x-2)^3-1+2x^2$ $\left[S=\left\{\frac{9}{5}\right\}\right]$

19 $5x^2-1-(x-1)(x+4)=-(x-2)-2x(2x+1)^2-(x-5)+(2x+1)^3$ $[S=\{-1\}]$

20 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\frac{x+2}{5}+\frac{x-3}{2}-\frac{4x-1}{10}=x+\frac{2x-1}{2}$$

Liberiamo l'equazione dai denominatori con queste operazioni:

- denominatore comune: $\dfrac{2(x+2)+5(x-3)-(4x-1)}{10}=\dfrac{10x+5(2x-1)}{10}$
- moltiplichiamo per 10: $10\cdot\dfrac{2(x+2)+5(x-3)-(4x-1)}{10}=\dfrac{10x+5(2x-1)}{10}\cdot 10$
- svolgiamo i calcoli: $2x+4+5x-15-4x+1=10x+10x-5$

Procedi adesso come nelle precedenti equazioni. $\left[S=\left\{-\frac{5}{17}\right\}\right]$

21 $(x+2)(x-3)-\dfrac{x-5}{2}\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=\left(1-\dfrac{2}{4}\right)x^2+\dfrac{1}{3}x-1$ $[S=\{4\}]$

22 $3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+x^2-\dfrac{1}{5}=(2x+1)^2-x-1-\dfrac{1}{15}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{5}\right\}\right]$

23 $x+x^2\left(2+\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{15}{4}\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{1}{4}x+\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2-\dfrac{3}{2}$ $[S=\mathbb{Q}]$

24 $\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{2}\right)+(x+5)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{5}\right)=+\dfrac{15}{7}\left(2+\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{1}{15}x+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)x^2$ $\left[S=\left\{\frac{7}{4}\right\}\right]$

25 $\left(3x+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{(x+1)^2}{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)}+\dfrac{1}{4}(5x+2)^2=5x^2-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^2$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{6}\right\}\right]$

26 $\dfrac{3x-1}{\dfrac{3}{4}}-\dfrac{2x-1}{6}+\dfrac{x}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}-\dfrac{(x+1)^2}{5}+\dfrac{(3x-1)\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)}{\dfrac{15}{2}}+\dfrac{2}{5}=0$ $\left[S=\left\{\frac{3}{16}\right\}\right]$

27 $\dfrac{4x-1}{9}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{(x-1)^2}{3}=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)x^2-\dfrac{1}{9}\dfrac{(3x-1)(2x+1)}{2}$ $[S=\{0\}]$

28 $\dfrac{3x+1}{6}-\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)x-\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}x\left(\dfrac{11}{4}-2x\right)$ $\left[S=\left\{\dfrac{5}{3}\right\}\right]$

29 $\dfrac{11x-3}{3}+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^3-\dfrac{3}{2}x\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2=\dfrac{x+1}{4}\cdot\dfrac{7x-2}{2}-\dfrac{(x-4)(x^2+1)}{4}$ $\left[S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}\right]$

30 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-(1-2x)^3+\dfrac{1}{8}x=\dfrac{1}{4}x\left(\dfrac{57}{2}-47x+32x^2\right)$ $[S=Q]$

31 $\dfrac{(2x-1)(3x+5)}{4}-10\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)^2+\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{(x+3)^2}{9}$ $[S=\{-2\}]$

32 $\dfrac{x-\dfrac{1}{2}(x-1)}{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\dfrac{1}{5}x+1}{3\left(\dfrac{4-2}{5}\right)}-\dfrac{(2x+1)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)}{3}$ $\left[S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\right]$

33 $\dfrac{4x+1}{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{\left(1+\dfrac{4}{3}x\right)}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\dfrac{5x-2}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}$ $\left[S=\left\{\dfrac{9}{10}\right\}\right]$

34 $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{2x-7}{15}+\dfrac{x}{3}+\left(\dfrac{1}{3}x+2\right)^2-\dfrac{32}{15}x=\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)+\dfrac{53}{15}$ $[S=\varnothing]$

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali intere nell'incognita x.

35 **ESERCIZIO SVOLTO**

$(b-3)x=x+b$

Svolgiamo i calcoli e riscriviamo l'equazione nella sua forma solita:

$bx-3x-x=b \quad \rightarrow \quad bx-4x=b \quad$ e raccogliendo $x \quad x(b-4)=b$

Per trovare la soluzione dobbiamo applicare il secondo principio di equivalenza e dividere per $b-4$ che dobbiamo quindi porre diverso da zero; procediamo allora alla discussione dell'equazione:

- se $b-4\neq 0$ cioè $b\neq 4$, otteniamo: $\dfrac{x(b-4)}{b-4}=\dfrac{b}{b-4} \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{b}{b-4}$
- se $b=4$ non possiamo dividere per $b-4$ ma, sostituendo 4 al posto di b, otteniamo

$$x\cdot 0=4 \quad \rightarrow \quad 0=4$$

che è un'equazione impossibile.

Riassumendo: $\begin{cases}\text{se } b\neq 4 & S=\left\{\dfrac{b}{b-4}\right\}\\ \text{se } b=4 & S=\varnothing\end{cases}$.

36 $2 + ax = 1$ $\left[\text{se } a \neq 0: S = \left\{-\frac{1}{a}\right\};\ \text{se } a = 0: S = \varnothing\right]$

37 $1 + 2ax = 1$ $[\text{se } a \neq 0: S = \{0\};\ \text{se } a = 0: S = Q]$

38 $(x+1)(a-1) = 0$ $[\text{se } a \neq 1: S = \{-1\};\ \text{se } a = 1: S = Q]$

39 $b(1-x) + 2 - b = 2(b+1)$ $[\text{se } b \neq 0: S = \{-2\};\ \text{se } b = 0: S = Q]$

40 $a(x-1)^2 + ax - 3 = ax^2 + a$ $\left[\text{se } a \neq 0: S = \left\{-\frac{3}{a}\right\};\ \text{se } a = 0: S = \varnothing\right]$

41 $2a(x+2) - x = a$ $\left[\text{se } a \neq \frac{1}{2}: S = \left\{-\frac{3a}{2a-1}\right\};\ \text{se } a = \frac{1}{2}: S = \varnothing\right]$

42 $4x^2 - x + a^2 + 1 = (2x+a)^2$ $\left[\text{se } a \neq -\frac{1}{4}: S = \left\{\frac{1}{1+4a}\right\};\ \text{se } a = -\frac{1}{4}: S = \varnothing\right]$

43 $4(x+a) - 2a(x+1) = (a+1)x + 2$ $\left[\text{se } a \neq 1: S = \left\{\frac{2}{3}\right\};\ \text{se } a = 1: S = Q\right]$

44 $\frac{1}{2}(x-4a) + a(2x+1) = (a+1)(x-a) + ax$ $[\forall a \in Q: S = \{2a^2\}]$

45 $(a-2)(x+2a) + 4a - \left(1 + \frac{1}{2}\right)a^2 = \frac{1}{2}(2x+a)^2 - 2(x+1)(x-1)$

$\left[\text{se } a \neq -2: S = \left\{\frac{-2}{a+2}\right\};\ \text{se } a = -2: S = \varnothing\right]$

46 $\left(x + \frac{1}{3}a\right)(3x-1) + ax - (a+1)\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}a\right)$

$\left[\text{se } a \neq 1: S = \left\{-\frac{4(a+1)}{9(a-1)}\right\};\ \text{se } a = 1: S = \varnothing\right]$

47 $\left(ax + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - (ax+1)(ax+2) = (x-2a)(x-1) - x^2$ $[\forall a \in Q: S = \{2(a+1)\}]$

48 $\frac{x-1}{2} + 3(a-1) + \frac{3}{4}x^2 = \left(\frac{1}{2}x - a\right)^2 + \frac{1}{2}(x-a)(x+a) - \frac{1}{2}a^2$

$\left[\text{se } a \neq -\frac{1}{2}: S = \left\{\frac{7-6a}{2a+1}\right\};\ \text{se } a = -\frac{1}{2}: S = \varnothing\right]$

49 $3(x-a) + 6\left(a + \frac{1}{3}\right) = 3(x+a) - 2(a-1)$ $[\text{se } a \neq 0: S = \varnothing;\ \text{se } a = 0: S = Q]$

50 $ax + (a+x)^2 = (x+1)(x+3a) + (a-1)x$ $[\text{se } a \neq 0: S = \{a-3\};\ \text{se } a = 0: S = Q]$

51 $a(x-1) = b$ $\left[\text{se } a \neq 0: S = \left\{\frac{a+b}{a}\right\};\ \text{se } a = 0 \wedge b \neq 0: S = \varnothing;\ \text{se } a = 0 \wedge b = 0: S = Q\right]$

52 $2b(x-2b) = a(x-a)$ $[\text{se } a \neq 2b: S = \{2b+a\};\ \text{se } a = 2b: S = Q]$

53 $(a+b)^2 = a(2b+a) + bx$ $[\text{se } b \neq 0: S = \{b\};\ \text{se } b = 0: S = Q]$

54 $ab(x+2) + ax + b^2 = (a+b)^2$

$\left[\text{se } a \neq 0 \wedge b \neq -1: S = \left\{\frac{a}{b+1}\right\};\ \text{se } a \neq 0 \wedge b = -1: S = \varnothing;\ \text{se } a = 0: S = Q\right]$

55 ESERCIZIO GUIDATO

$$\frac{ax}{a-1}=\frac{1}{a+1}+\frac{ax}{a^2-1}$$

Poiché l'equazione è intera, il dominio è l'insieme Q.
Per quanto riguarda il parametro, affinché l'equazione abbia significato, dobbiamo imporre che sia

$$a\neq 1 \ \wedge \ a\neq -1$$

In queste ipotesi, facendo il denominatore comune e sviluppando i calcoli otteniamo:

$$\frac{ax(a+1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{a-1+ax}{(a-1)(a+1)} \quad \rightarrow \quad a^2x+ax=a-1+ax \quad \rightarrow \quad a^2x=a-1$$

Procedi adesso come nelle equazioni degli esercizi precedenti:

- se $a\neq 0$ ....
- se $a=0$ ....

[se $a=1 \vee a=-1$: l'equazione perde significato; se $a\neq 1 \wedge a\neq -1 \wedge a\neq 0: S=\left\{\frac{a-1}{a^2}\right\}$; se $a=0: S=\varnothing$]

56 $\dfrac{x+1}{a+1}=\dfrac{3}{a-1}-\dfrac{3-2a}{a^2-1}$

[se $a=1 \vee a=-1$: l'equazione perde significato; se $a\neq 1 \wedge a\neq -1: S=\left\{\frac{4a+1}{a-1}\right\}$]

57 $\dfrac{ax-2}{a+2}+\dfrac{1+x}{a-1}=\dfrac{a-2x}{a+2}$

[se $a=1 \vee a=-2$: l'equazione perde significato; se $a\neq 1 \wedge a\neq -2 \wedge a\neq 0: S=\left\{\frac{a-2}{a}\right\}$; se $a=0: S=\varnothing$]

58 $\dfrac{x+1}{b-1}=\dfrac{2}{b^2(b-1)}+\dfrac{1+x}{b}$

[se $b=0 \vee b=1$: l'equazione perde significato; se $b\neq 0 \wedge b\neq 1: S=\left\{\frac{2-b}{b}\right\}$]

59 $\dfrac{x}{a-2}-1=\dfrac{x-a+2}{a-1}+\dfrac{4}{(a-2)(a-1)}$

[se $a=2 \vee a=1$: l'equazione perde significato; se $a\neq 2 \wedge a\neq 1: S=\{a+2\}$]

60 $\dfrac{bx}{b+2}-\dfrac{1}{b-1}+\dfrac{2x}{b+2}=\dfrac{9b-14}{5(b-1)}$

[se $b=1 \vee b=-2$: l'equazione perde significato; se $b\neq 1 \wedge b\neq -2: S=\left\{\frac{9}{5}\right\}$]

61 $\dfrac{(x+1)(x-2)}{a-1}-\dfrac{x^2}{a+1}=\dfrac{2x^2+ax}{a^2-1}$

[se $a=1 \vee a=-1$: l'equazione perde significato; se $a\neq 1 \wedge a\neq -1 \wedge a\neq -\frac{1}{2}: S=\left\{\frac{-2(a+1)}{2a+1}\right\}$; se $a=-\frac{1}{2}: S=\varnothing$]

62 $\dfrac{1}{2a}-\dfrac{x}{a-2}+\dfrac{3}{4a^2-8a}=\dfrac{2x-1}{8a-4a^2}$

[se $a=0 \vee a=2$: l'equazione perde significato; se $a\neq 0 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq \frac{1}{2}: S=\left\{\frac{a-1}{2a-1}\right\}$; se $a=\frac{1}{2}: S=\varnothing$]

Risolvi le seguenti equazioni frazionarie.

63 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\frac{3}{2x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{4x-3}{2x^2-5x+2}$$

Il dominio dell'equazione è l'insieme $D = Q - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.

Svolgendo i calcoli otteniamo: $\dfrac{3(x-2)-2(2x-1)}{(2x-1)(x-2)}=\dfrac{4x-3}{(2x-1)(x-2)}$

da cui $3x-6-4x+2=4x-3 \quad \rightarrow \quad -5x=1 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{1}{5}$

Poichè il valore trovato appartiene all'insieme D, possiamo dire che esso è soluzione dell'equazione data: $S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$.

64 $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3x-1}{(x-2)(x-1)}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{2}\right\}\right]$

65 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4-3x}{x(x-1)^2}$ $\left[S=\left\{\frac{3}{2}\right\}\right]$

66 $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2+3x-3}{(x+1)(x-3)}$ $[S=\{2\}]$

67 $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{2(x^2-x-2)}=\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{8}{(x^2-4)(x+1)}$ $\left[S=\left\{-\frac{2}{5}\right\}\right]$

68 $\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{x-1}{2x-1}=\dfrac{7x^2-2x-1}{(x+2)(2x-1)}+\dfrac{2(1-x)}{x+2}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{3}\right\}\right]$

69 $\dfrac{5x}{2x^2+3x-9}-\dfrac{1}{2x-3}=\dfrac{6}{x+3}+\dfrac{2}{x+3}$ $\left[S=\left\{\frac{7}{4}\right\}\right]$

70 $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{2x-1}{x-3}=\dfrac{3x+2}{x+1}+\dfrac{6}{x-3}$ $[S=\{7\}]$

71 $\dfrac{3x+4}{x+1}-\dfrac{2x+1}{x^2-1}=\dfrac{4x+1}{x+1}-\dfrac{x-2}{x-1}$ $[S=\{6\}]$

72 $\dfrac{2(x-1)}{(x^2-4)(x+1)}-\dfrac{x-3}{(x-2)(x+1)}=-\dfrac{3+x}{x^2-4}$ $[S=\varnothing]$

73 $\dfrac{x^3}{x^2+3x+2}+\dfrac{6x+1}{x+2}=\dfrac{x^2+4x}{x+1}+\dfrac{3-2x}{(x+1)(x+2)}$ $[S=\{2\}]$

74 $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x(x^2+2)}{x^2+x-2}=\dfrac{3x+4}{x+2}+\dfrac{x^2}{x+2}$ $\left[S=\left\{-\frac{4}{5}\right\}\right]$

75 $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x^2+2x}{x+1}=\dfrac{1-2x}{x^2-2x+1}+\dfrac{x^2}{x-1}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{2}\right\}\right]$

76 $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{2(x-1)}=\dfrac{x^3}{2(x-2)(x-1)}$ $[S=\varnothing]$

77 $\frac{x}{2x-1}+\frac{x-2}{1+2x}=2+\frac{3+4x^2}{1-4x^2}$ $\left[S=\left\{\frac{7}{4}\right\}\right]$

78 $\frac{x^3+3}{x^2+3x+2}+\frac{6x+1}{x+2}=\frac{x^2+4x}{x+1}+\frac{3-2x}{(x+1)(x+2)}$ $[S=\emptyset]$

79 $\frac{(x+2)^2}{2x+1}-\frac{(x+1)(5x-2)}{2x^2-x-1}=\frac{x^3-6x-4}{(x-1)(2x+1)}-1$ $[S=\emptyset]$

80 $\frac{4x}{x^2+3x+2}-\frac{2}{6x+6}=\frac{\frac{x}{2}+1}{3x+3}-\frac{x^2+4}{(6x+12)(x+1)}$ $\left[S=\left\{\frac{2}{9}\right\}\right]$

Esercizi di Approfondimento

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali intere nell'incognita x.

1 $\frac{x^2-1}{a+1}=\frac{x^2+x-1}{a+2}-\frac{x(2a-x)}{(a+2)(a+1)}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=-1 \vee a=-2: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a=1: S=\emptyset;\\ \text{se } a\neq-1\wedge a\neq-2\wedge a\neq 1: S=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}\end{array}\right]$

2 $\frac{x(a-2)}{(a+1)(b-2)}-\frac{1}{ab-2a+b-2}=\frac{1}{b-2}+\frac{x}{a+1}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=-1 \vee b=2: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq-1\wedge b\neq 2\wedge a=b=-2: S=Q;\\ \text{se } a\neq-1\wedge b\neq 2\wedge a=b\neq-2: S=\emptyset;\\ \text{se } a\neq-1\wedge b\neq 2\wedge a\neq b: S=\left\{\frac{a+2}{a-b}\right\}\end{array}\right]$

3 $\frac{bx+1}{a+1}+\frac{a^2+b}{a^2+a}=1-\frac{x}{a+1}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=-1 \vee a=0: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq-1\wedge a\neq 0\wedge b\neq-1: S=\left\{-\frac{b}{a(b+1)}\right\};\\ \text{se } a\neq-1\wedge a\neq 0\wedge b=1: S=\emptyset\end{array}\right]$

4 $\frac{x}{a+1}-\frac{bx-1}{a-1}-\frac{x}{a-1}=\frac{1-2x+a}{a^2-1}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=-1 \vee a=1 \text{ allora l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq-1\wedge a\neq 1\wedge b\neq 0: S=\{0\};\\ \text{se } a\neq-1\wedge a\neq 1\wedge b=0: S=Q\end{array}\right]$

5 $\frac{x+1}{a-2}-\frac{1}{a}=\frac{x-1}{2a+1}-\frac{1}{a(2a+1)}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=2 \vee a=0 \vee a=-\frac{1}{2}: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq 2\wedge a\neq 0\wedge a\neq-\frac{1}{2}\wedge a\neq-3: S=\{-1\};\\ \text{se } a=-3: S=Q\end{array}\right]$

6 $\frac{x^2}{(a+3)a}=\frac{x^2-x+2}{a^2+2a}-\frac{2-x}{(a+3)(a+2)}-\frac{x^2+2}{(a+3)(a^2+2a)}$

$\left[\text{se } a=-2 \vee a=0 \vee a=-3: \text{l'equazione perde significato; se } a\neq-2\wedge a\neq 0\wedge a\neq-3: S=\left\{\frac{4}{3}\right\}\right]$

7 $\frac{x^2}{b^2-2b}-\frac{6x^2+4x-1}{(b-2)(b^2+2)b}=\frac{x^2}{b^2+2}+\frac{2x^2+x}{(b^2+2)b}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } b=2 \vee b=0: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } b\neq 2\wedge b\neq 0\wedge b=-2: S=\emptyset;\\ \text{se } b\neq 2\wedge b\neq 0\wedge b\neq-2: S=\left\{\frac{1}{b+2}\right\}\end{array}\right]$

8 $\dfrac{x}{2a-1}-\dfrac{x}{b-1}+\dfrac{1}{b-1}=\dfrac{a+1}{2ba-b-2a+1}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=\frac{1}{2}\vee b=1: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq 1\wedge b\neq 2a: S=\left\{\frac{a-2}{2a-b}\right\};\\ \text{se } b=4\wedge a=2: S=Q;\\ \text{se } a\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq 1\wedge b=2a\wedge a\neq 2: S=\varnothing\end{array}\right]$

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali frazionarie.

9 $\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{a-1}{x^2+xa-2x-2a}$ $\left[\text{se } a\neq 1\wedge a\neq-\frac{1}{2}: S=\{a+1\};\ \text{se } a=1\vee a=-\frac{1}{2}: S=\varnothing\right]$

10 $\dfrac{x+1}{a+2x}+\dfrac{a-1}{x+2}=\dfrac{(x+a)^2}{2x^2+4x+ax+2a}$ $\left[\text{se } a\neq 0\wedge a\neq\frac{4}{3}: S=\{a-2\};\ \text{se } a=0\vee a=\frac{4}{3}: S=\varnothing\right]$

11 $\left(\dfrac{1}{3ax+x^2+2a^2}-\dfrac{1}{ax+x^2-2a^2}\right)(x+a)=-\dfrac{1}{x-a}$ $\left[\text{se } a\neq 0: S=\{0\};\ \text{se } a=0: S=\varnothing\right]$

12 $\dfrac{a+1}{x+a}+\dfrac{3x}{x-a}-\dfrac{x+3x^2}{x^2-a^2}=0$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a\neq 0\wedge a\neq\frac{1}{3}\wedge a\neq-\frac{1}{5}: S=\left\{\frac{a+1}{4}\right\};\\ \text{se } a=0: S=Q;\\ \text{se } a=\frac{1}{3}\vee a=-\frac{1}{5}: S=\varnothing\end{array}\right]$

13 $\dfrac{x}{x-\frac{1}{a}}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2+3x-\frac{1}{a}}{(x+1)\left(x-\frac{1}{a}\right)}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=0: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq 0\wedge a\neq-\frac{2}{3}: S=\left\{\frac{2}{3a}\right\};\\ \text{se } a=-\frac{2}{3}: S=\varnothing\end{array}\right]$

14 $\dfrac{x}{x-b}-x\left(\dfrac{b-1}{x^2-bx}+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{b+1}{x^2-bx}$ $\left[\text{se } b\neq-1: S=\{b+1\};\ \text{se } b=-1: S=\varnothing\right]$

15 $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{a}{ax-b}+\dfrac{x-b}{(ax-b)(x+1)}=\dfrac{2x+1}{x+1}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a\neq 1\wedge a^2+b\neq 0: S=\{-a\};\\ \text{se } a=1\vee a^2+b=0: S=\varnothing\end{array}\right]$

16 $(a-1)\left(\dfrac{1}{ax+2}-\dfrac{x}{3x-2}\right)+\dfrac{(ax+1)(ax-2)+4a}{3ax^2-2ax+6x-4}=\dfrac{x}{3x-2}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a\neq 1: S=\left\{\frac{2}{3}a\right\};\\ \text{se } a=1: S=\varnothing\end{array}\right]$

17 $\dfrac{1-x}{x-2}+\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x(x+a)+1-a}{x^2-x-2}=\dfrac{x+1}{x+1}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a\neq-1\wedge a\neq-2\wedge a\neq-\frac{1}{2}: S=\left\{\frac{a}{a+1}\right\};\\ \text{se } a=-1\vee a=-2\vee a=-\frac{1}{2}: S=\varnothing\end{array}\right]$

18 $\dfrac{x-a}{1-x}+\dfrac{x^2-a}{1-x^2}+\dfrac{a}{1+x}-\dfrac{ax}{a-ax}=\dfrac{x(x-a-3)}{1-x^2}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=0: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq 0\wedge a\neq 3\wedge a\neq\frac{3}{2}: S=\left\{\frac{a}{3-a}\right\};\\ \text{se } a=3\vee a=\frac{3}{2}: S=\varnothing\end{array}\right]$

19 $\dfrac{2a+x}{2a-x}+\left(\dfrac{1-x}{2}+2a\right)\cdot\dfrac{a}{x^2+2a^2-3ax}=\dfrac{2a+x}{a-x}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=0: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq 0\wedge a\neq\frac{1}{6}\wedge\ a\neq\frac{1}{3}: S=\left\{\frac{1}{3}\right\};\\ \text{se } a=\frac{1}{6}\vee a=\frac{1}{3}: S=\varnothing\end{array}\right]$

20 $\dfrac{a-2x}{x^2-ax}-\dfrac{2}{(x^3-a^2x)}=\left(\dfrac{x-a}{x}-\dfrac{3x+1}{x-a}\right)\dfrac{1}{x+a}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a\neq\pm1\wedge a\neq-2: S=\left\{\frac{2}{a+1}\right\};\\ \text{se } a=\pm\,1\vee a=-2: S=\varnothing\end{array}\right]$

21 $\dfrac{x-b}{x-1}+\dfrac{x}{3b+x}=\dfrac{1}{3b+x}\left(x+\dfrac{x^2}{x-1}+b\right)$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } b\neq 0\wedge b\neq\frac{1}{6}\wedge b\neq\frac{2}{3}: S=\{3b-1\};\\ \text{se } b=0: S=Q;\\ \text{se } b=\frac{1}{6}\vee b=\frac{2}{3}: S=\varnothing\end{array}\right]$

22 $\left(\dfrac{a+1}{ax+x-a-1}-\dfrac{a-1}{ax+a+x+1}\right)\cdot\dfrac{a-1}{2}=a-\dfrac{ax^2}{x^2-1}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=-1: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq-1\wedge a\neq 1\wedge a\neq\frac{1}{2}: S=\left\{\frac{2a^2}{1-a}\right\};\\ \text{se } a=1\vee a=\frac{1}{2}: S=\varnothing\end{array}\right]$

23 $\left(\dfrac{x+a}{ax+2x}+\dfrac{x^2+1}{a^2+2a-ax-2x}\right):\left(\dfrac{x}{a+2}\right)=\dfrac{(a-1)^2}{ax^2-x^3}-\dfrac{1-x}{a-x}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=-2: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq-2\wedge a\neq\frac{1}{2}\wedge a\neq\frac{1}{3}: S=\{1-2a\};\\ \text{se } a=\frac{1}{2}\vee a=\frac{1}{3}: S=\varnothing\end{array}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni particolari di grado superiore al primo.

24 **ESERCIZIO SVOLTO**

$x^2-6x=7$

Scriviamo innanzi tutto l'equazione nella forma $A(x)=0$: $x^2-6x-7=0$
Scomponiamo il polinomio al primo membro: $(x+1)(x-7)=0$
Applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

$$x+1=0 \quad\vee\quad x-7=0$$
$$x=-1 \quad\vee\quad x=7$$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S=\{-1,7\}$.

25 $(x-3)(x+2)=0$ $[S=\{-2,3\}]$

26 $3x+x^2=10$ $[S=\{-5,2\}]$

27 $x(x-6)=4(2-x)$ $[S=\{-2,4\}]$

28 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$x\left(\frac{1}{3}x - \frac{x+8}{12}\right) = \frac{5x^2 - 16x}{6} - \frac{1}{3}x$$

Svolgiamo prima i calcoli in modo da ricondurre l'equazione alla forma normale:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{5x^2 - 16x}{6} - \frac{1}{3}x \quad \to \quad \frac{3x^2 - 8x}{12} = \frac{10x^2 - 32x - 4x}{12} \quad \to \quad 7x^2 - 28x = 0$$

Procedi adesso applicando la legge di annullamento del prodotto. $[S = \{0, 4\}]$

29 $(x-1)^3 - x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ $[S = \{1, 2\}]$

30 $(x+1)^2 = (x-3)(x^2 + 2x + 1)$ $[S = \{-1, 4\}]$

31 $(x+2)(2x-1) - x^2 + 4 = 0$ $[S = \{-2, -1\}]$

32 $\dfrac{2x^2 - x}{3} = x(x-2)$ $[S = \{0, 5\}]$

33 $x(x-3) = \dfrac{x^2 - x(x+6) + 2}{2}$ $[S = \{-1, 1\}]$

34 $(2x + b + 1)^2 - (x + b + 1)^2 = 0$ $\left[S = \left\{0, -\dfrac{2b+2}{3}\right\}\right]$

35 $\dfrac{(x^2 - 2x - 3)(x+1)}{x-3} = 0$ $[S = \{-1\}]$

36 $\dfrac{(x^3 - 27)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 1}$ $[S = \{3, 5\}]$

37 $(x - a + 1)\left[3(x+a) - 3x^2 - 3ax\right] = 0$ $[S = \{1, -a, a-1\}]$

38 $\dfrac{(x^3 - 9x)}{x^2 - 2x - 3} = 0$ $[S = \{-3, 0\}]$

39 $2(1-x) - (2-2x)(a + ax) = 0$ $\left[\text{se } a \neq 0 : S = \left\{1, \dfrac{1-a}{a}\right\};\ \text{se } a = 0 : S = \{1\}\right]$

40 $a^2x^2 - 9 = 3(ax-3)(x+1)$ $\left[\text{se } a \neq 0 \wedge a \neq 3 : S = \left\{\dfrac{3}{a}, 0\right\};\ \text{se } a = 0 : S = \{0\}; \text{se } a = 3 : S = Q\right]$

41 $\dfrac{x^2 - 3x + 3ax + a}{(x+2)(a-x)} = 1$ $\left[\text{se } a \neq 0 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq \dfrac{1}{2} : S = \left\{-a, \dfrac{1}{2}\right\};\ \text{se } a = 0 \vee a = 2 : S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\};\ \text{se } a = \dfrac{1}{2} : S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni riassuntive di vario genere.

42 $\left(\dfrac{1}{2}x - 2\right)(x+3) + \left(x + \dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right) + \dfrac{1}{8}x + \dfrac{3}{4} = 0$ $[S = \{-2, 3\}]$

43 $\dfrac{\frac{3}{2}x-2}{1-\frac{1}{2}}+5x^2-(2x+1)(2x+3)-x=0$ $[S=\{-1,7\}]$

44 $14x^2-\dfrac{4x^2+2x-2}{1-\frac{5}{7}}+(x+1)^2=4x$ $[S=\{1,8\}]$

45 $4x^2+2x-2=2(x+1)(2x-1)$ $[S=Q]$

46 $\dfrac{x^2}{2x+2}-\dfrac{x-1}{x^2-1}-\dfrac{1}{2}x=0$ $[S=\{-2\}]$

47 $(x+1)^3-\dfrac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{x}=1$ $\left[S=\left\{-\frac{7}{3}\right\}\right]$

48 $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{2(x-1)}-\dfrac{x^3}{2(x^2-3x+2)}=0$ $[S=\varnothing]$

49 $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x^2+2}{x-2}=\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$ $[S=\{4\}]$

50 $\dfrac{3x+2}{x+2}+\dfrac{x^3}{x^2+3x+2}=x-\dfrac{2}{x+1}$ $\left[S=\left\{-\frac{6}{5}\right\}\right]$

51 $\dfrac{\left[(x+2)^2+x+1\right](x^2+3x+3)}{(x+2)^4}-1=0$ $[S=\{-1\}]$

52 $\dfrac{x-1}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{x+1}\left(2+\dfrac{4}{5}x^2+\dfrac{7}{5(x+2)}\right)$ $\left[S=\left\{-\frac{5}{2}\right\}\right]$

53 $\dfrac{1+3x}{x^2-4x+4}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{x}{x^2-4x+4}=\dfrac{x^2+1}{x^2+x}+\dfrac{10x}{(x-2)^2(x+1)}-\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$ $[S=\{4\}]$

54 $1+\dfrac{2}{x^2}+\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2=\dfrac{2}{x}\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)$ $[S=\{2\}]$

55 $\dfrac{1-6x^2}{x^2+3x-4}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+4}+\dfrac{x^2}{x-1}=0$ $[S=\varnothing]$

56 $\dfrac{1}{x^2+2}-\dfrac{2x-1}{2(x-1)}+\dfrac{x^2+x}{x^2+2}=0$ $[S=\{0,4\}]$

57 $\dfrac{x^2+5}{x^2+1}+\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{x}{x-2}$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right]$

58 $\dfrac{(x^2-4)^3}{x^2+4x+4}=4x(4-x^2)$ $[S=\{2\}]$

59 $\dfrac{2}{3}x^3=\dfrac{1}{6}(x-1)(2x+1)^2$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}\right]$

60 $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x^2+2x}{x+1}-\dfrac{1-2x}{x^2-2x+1}-\dfrac{x^2}{x-1}=0$ $\left[S=\left\{\frac{1}{2}\right\}\right]$

61 $\dfrac{1+3x}{x^2-4x+4}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{x}{x^2-4x+4}=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}+\dfrac{10x}{(x-2)^2(x+1)}-\dfrac{x^2}{(x-2)(x+1)}$ $[S=\{4\}]$

62 $\dfrac{1}{x^2a+ax+x^2+x}+\dfrac{x}{x+1}=1$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=-1: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq -1 \wedge a\neq -2: S=\left\{\dfrac{1}{a+1}\right\};\ \text{se } a=-2: S=\varnothing\end{array}\right]$

63 $\dfrac{x}{x-a}-2-\left(\dfrac{x-ax}{a-1}+\dfrac{ax-x-1}{a-2}\right)=\dfrac{2a^2-5a}{ax-2x-a^2+2a}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a=1\vee a=2: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a\neq 1\wedge a\neq 2\wedge a\neq 0\wedge a\neq 3: S=\{0,3\};\\ \text{se } a=0: S=\{3\};\\ \text{se } a=3: S=\{0\}\end{array}\right]$

64 $\dfrac{x}{x+a}-\dfrac{2x^2}{x^2-a^2}=1$ $\left[\text{se } a\neq 0: S=\left\{\dfrac{1}{2}a\right\};\ \text{se } a=0: S=\varnothing\right]$

65 $\dfrac{x^2(1-a)}{(x^2-2ax+a^2)(x+a)}+\dfrac{a}{x-a}=\dfrac{1}{x+a}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a\neq 0\wedge a\neq 1\wedge a\neq -3: S=\left\{\dfrac{a^2+a}{2}\right\};\\ \text{se } a=0: S=Q;\\ \text{se } a=1\vee a=-3: S=\varnothing\end{array}\right]$

66 $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x^2-a}{ax-a+bx-b}=\dfrac{x}{a+b}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a+b=0: \text{l'equazione perde significato;}\\ \text{se } a+b\neq 0\wedge b\neq -1\wedge a+b+1\neq 0: S=\left\{\dfrac{a}{a+b+1}\right\};\\ \text{se } (a+b+1=0\wedge a\neq 0)\vee b=-1: S=\varnothing\end{array}\right]$

67 $\dfrac{x^2+2}{ax-x^2}-1=\dfrac{a}{x(a-x)}-\dfrac{3-x}{a-x}$

$\left[\begin{array}{l}\text{se } a\neq -1\wedge a\neq 2: S=\{-1,a-2\};\\ \text{se } a=-1: S=\{-3\};\\ \text{se } a=2: S=\{-1\}\end{array}\right]$

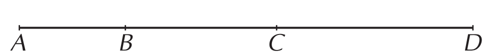
PROBLEMI

I problemi che seguono possono essere risolti mediante un'equazione. Ricordiamo allora i passi da seguire:
- *individuare le richieste del problema*
- *scrivere i dati in modo da mettere in evidenza le relazioni indicate nel problema*
- *scegliere l'incognita più adatta*
- *riscrivere i dati in funzione dell'incognita*
- *individuare l'equazione modello del problema che consenta di trovare il valore dell'incognita*
- *rispondere alle richieste del problema.*

68 **ESERCIZIO SVOLTO**

Si deve dividere un nastro lungo 150cm in tre parti tali che ogni parte superi la precedente di 15cm; quanto è lunga ciascuna parte?

Il nastro può essere rappresentato da un segmento AD suddiviso in tre parti dai punti B e C ad esso interni. I dati del problema sono quindi:



$$\overline{AD}=150 \qquad \overline{BC}=\overline{AB}+15 \qquad \overline{CD}=\overline{BC}+15$$

Le relazioni messe in evidenza dai dati suggeriscono di indicare con x la misura del segmento $\overline{AB}$; posto quindi $\overline{AB} = x$, si ha che:

$$\overline{BC} = x + 15 \qquad \overline{CD} = (x + 15) + 15 = x + 30$$

Poichè sappiamo che la somma dei tre segmenti, cioè il segmento $\overline{AD}$, misura 150, possiamo scrivere l'equazione:

$$\underbrace{x}_{\overline{AB}} + \underbrace{x + 15}_{\overline{BC}} + \underbrace{x + 30}_{\overline{CD}} = 150$$

Risolvendo l'equazione si trova che $x = 35$.

Avere risolto l'equazione non vuol dire però avere risolto il problema perchè si chiede di determinare la lunghezza di ciascuna delle tre parti; riprendendo le relazioni iniziali possiamo dire che:

$$\overline{AB} = 35 \qquad \overline{BC} = 50 \qquad \overline{CD} = 65$$

69 **ESERCIZIO GUIDATO**

Due persone insieme pesano 170kg e si sa che $\frac{1}{5}$ della differenza fra i loro pesi è 6kg. Quanto pesano le due persone?

Se la prima persona pesa x, la seconda pesa $170 - x$ e la differenza fra i loro pesi, supposto che la seconda abbia peso maggiore della prima (sarebbe lo stesso supporre il contrario), è $170 - x - x = 170 - 2x$.

L'equazione del problema è quindi: $\frac{1}{5}(170 - 2x) =$ .... [100, 70]

70 Dopo una serata al casinò due amici vincono insieme € 420 e la vincita del primo, diminuita di € 60, è il doppio di quella del secondo. Qual è la vincita di ciascuno? [€ 120, € 300]

71 Due multipli consecutivi di 3 sono tali che i $\frac{5}{2}$ del minore eguagliano il doppio del maggiore; trova i due numeri. [12, 15]

72 Un negoziante ha aumentato le proprie entrate del 30% rispetto all'anno precedente raggiungendo così € 26000. Quanto guadagnava lo scorso anno? [€ 20000]

73 Due grattacieli vicini differiscono in altezza di 80m. Sapendo che uno è alto i $\frac{5}{7}$ dell'altro trova l'altezza dei due grattacieli. [200m, 280m]

74 Andrea, Giorgio e Carlo possiedono insieme 210 automobiline. Carlo ne ha il triplo rispetto a Giorgio, ovvero 80 in più. Quante automobiline hanno a testa? [50, 40, 120]

75 Ogni anno Matteo regala a Laura delle rose per il suo compleanno. Negli ultimi tre anni ne ha regalate 80 in totale. Il secondo anno ne ha regalate 10 in più dell'anno precedente, mentre per il terzo ha triplicato quante ne aveva regalate il primo anno. Quante rose ha regalato il primo anno? [14]

76 L'età attuale di Luca, diminuita del valore ottenuto dividendo per 10 la sua età fra 3 anni, eguaglia la sua età di 3 anni fa. Quanti anni ha Luca? [27]

77 Supponiamo di svuotare un contenitore pieno di liquido per $\frac{3}{5}$ della sua capacità. Prelevati poi $\frac{2}{3}$ della quantità rimanente rimangono 32ℓ. Qual è la capacità del contenitore? [240ℓ]

78 Se Andrea e Luca riuscissero a mettere da parte € 900 otterrebbero € 100 in più di $\frac{1}{3}$ della somma ottenuta diminuendo di € 100 l'importo del loro affitto. Quanto costa l'affitto? [€ 2500]

79 In quest'ultimo anno Andrea ha acquistato 12 nuovi libri, riuscendo così ad averne $\frac{7}{6}$ rispetto a quanti ne possedeva un anno fa. Quanti ne ha ora? [84]

80 Un'azienda italiana di bulloni riesce a produrre il quadruplo della sua diretta concorrente francese. La differenza delle due produzioni divisa per 5 eguaglia le 3000 unità. Quanto produce ogni azienda? [5000, 20000]

81 Carlo ha 90 anni e i suoi tre nipoti, complessivamente, 60 anni. Calcola fra quanti anni la somma delle età dei nipoti raggiungerà l'età che il nonno ha oggi. [10]

82 Giorgio e Mara hanno 54 anni in due; inoltre un quarto dell'età di Giorgio eguaglia l'età di Mara aumentata di 2 e divisa poi per 3. Quanti anni hanno? [32, 22]

83 Due coppie di amici vanno a fare shopping. Le ragazze, spendendo ognuna il doppio rispetto al proprio ragazzo, comprano per un valore di € 300. Inoltre la prima delle due spende € 30 in meno del doppio di quanto spende l'altra. Quanto spendono i quattro? [€ 55, € 95, € 110, € 190]

84 In un palazzetto sono entrati i $\frac{3}{5}$ dei ragazzi attesi per un concerto. Dei rimanenti, i $\frac{2}{3}$ si stanno apprestando ad entrare mentre gli altri 400 sono ancora sulla strada. Quante persone assisteranno al concerto questa sera? [3000]

85 Una somma di denaro diminuita di € 100 eguaglia i $\frac{7}{10}$ della stessa somma aumentati di € 50. Quanto vale tale somma? [€ 500]

86 Se Luca spendesse i $\frac{3}{2}$ di quanto spende Marco per vestirsi gli rimarrebbe appena $\frac{1}{3}$ del suo stipendio. Sapendo che Marco percepisce uno stipendio di € 1600 e, una volta tolte le spese per l'abbigliamento, ne rimangono ancora $\frac{7}{10}$, calcola lo stipendio di Luca. [€ 1080]

87 Padre, madre e figlio contribuiscono in parti diverse al mantenimento della famiglia. Madre e figlio insieme versano € 1000, mentre il padre contribuisce il doppio rispetto al figlio e per € 200 in più di quanto fa la madre. Qual è la somma che ciascuno mette a disposizione? [€ 800, € 600, € 400]

88 Tre venditori ortofrutticoli sono diretti concorrenti al mercato comunale. Il secondo guadagna il doppio del primo meno € 400; il terzo la metà del secondo e tutti insieme € 3400. Quanto guadagna ognuno di essi? [€ 1000, € 1600, € 800]

89 In un laboratorio ci sono due ceste di pezzi da rifinire; la prima contiene un numero di pezzi pari a $\frac{7}{5}$ di quelli contenuti nella seconda e se spostiamo nella seconda cesta 30 pezzi della prima, entrambe hanno un numero uguale di pezzi. Calcola il numero di pezzi contenuto inizialmente nelle due ceste. [210, 150]

90 Un numero intero diviso per 5 dà resto 2, diviso per 3 dà resto 1 e la somma dei relativi quozienti è 91. Qual è il numero?
(Suggerimento: ricorda che se un numero n diviso per k ha quoziente q e resto r allora $n = kq + r$) [172]

91 La soluzione dell'equazione $\frac{3x-1}{x}-1=\frac{2x+2}{x-1}$ è equivalente ad una frazione tale che la somma fra il quadruplo del numeratore con il doppio del denominatore è uguale a 42. Trova la frazione. $\left[\frac{3}{15}\right]$

92 Spillando il vino da una botte si riempie un recipiente in 4 minuti e spillandolo da una seconda botte lo stesso recipiente si riempie in 6 minuti; se si fa defluire il vino da entrambe le botti, dopo quanto tempo il recipiente è pronto per la spedizione? [2,4 minuti]

93 In un numero di tre cifre, la cifra delle centinaia è doppia di quella delle decine e quella delle unità è doppia di quella delle centinaia; inoltre se da quel numero si sottrae il numero che si ottiene scambiando fra loro la cifra delle centinaia con quella delle decine si ottiene 180. Qual è il numero? [428]

94 In una fattoria che alleva polli e conigli ci sono anche 3 gatti e 2 cani; se si contano le teste degli animali si trova che sono 218; se si contano le zampe si trova che sono 620. Quanti polli e quanti conigli ci sono nella fattoria? [126 polli, 87 conigli]

Risolvi i seguenti problemi che comportano conoscenze geometriche.

95 In un triangolo isoscele la base misura 60cm e supera di 10cm la metà di ciascun lato. Calcola il perimetro. [260cm]

96 In un rettangolo il semiperimetro misura 80cm. Sapendo che l'altezza è i $\frac{3}{5}$ della base calcola l'area. [1500cm^2]

97 In un triangolo rettangolo i due angoli acuti sono uno i $\frac{4}{5}$ dell'altro. Quanto misurano? [$40°, 50°$]

98 La misura di un angolo raddoppiata e diminuita di 30° eguaglia il supplementare dell'angolo stesso. Quanto misura tale angolo? [70°]

99 In un trapezio rettangolo la base minore uguaglia l'altezza che a sua volta è pari a $\frac{3}{7}$ della base maggiore. Se l'area misura 1500cm^2 quanto è lungo il lato obliquo? [50cm]

100 In un rettangolo la base supera l'altezza di 3cm e l'area misura 10cm^2. Quanto vale il perimetro? [14cm]

101 L'area di un rettangolo misura 60cm^2 e la base supera di 3cm il triplo dell'altezza. Calcola il perimetro. [38cm]

102 Il rapporto fra le diagonali di un rombo è pari a $\frac{3}{2}$ e la loro somma è uguale a 75cm. Quanto misura l'area? [675cm^2]

103 In un trapezio isoscele di perimetro 82cm la base maggiore supera la somma dei lati obliqui di 10cm e la base minore è pari ai $\frac{4}{5}$ di ciascun lato. Calcola le basi. [12cm, 40cm]

104 In un rombo la somma delle semidiagonali è pari a 3 volte la loro differenza. Sapendo che l'area misura 1600cm^2 calcola la misura delle diagonali. [40cm, 80cm]

105 In un triangolo isoscele la differenza fra la somma dei lati obliqui e la base è pari a 40cm. Se il perimetro misura 160cm quanto misura l'area del triangolo? [1200cm^2]

106 In un quadrilatero il primo angolo è $\frac{1}{3}$ del secondo, il quale è $\frac{3}{4}$ del terzo, infine il quarto uguaglia il terzo. Quanto misurano gli angoli? [30°, 90°, 120°, 120°]

107 In un triangolo un angolo supera la somma degli altri due di 20°, mentre questi ultimi stanno in rapporto $\frac{5}{3}$. Quali sono le misure degli angoli? [30°, 50°, 100°]

108 Il doppio della base minore di un trapezio isoscele eguaglia la base maggiore diminuita di 6cm, mentre $\frac{1}{3}$ di ogni lato obliquo è pari ad $\frac{1}{5}$ della base maggiore. Se il perimetro misura 24cm quanto misura la base minore? [2cm]

109 Ciascun lato obliquo di un triangolo isoscele misura 15cm mentre metà della base è pari a $\frac{3}{4}$ dell'altezza. Quanto vale l'area? [108cm^2]

110 Un trapezio rettangolo ha la base maggiore lunga $2a$, che è $\frac{5}{2}$ della minore. Calcola l'altezza del rettangolo che si ottiene completando il trapezio con il triangolo rettangolo che ha come ipotenusa il suo lato obliquo, sapendo che l'area del trapezio è uguale a quella del triangolo aumentata di $12a^2$. [$15a$]

111 Un rettangolo $ABCD$ ha i lati proporzionali ai numeri 6 e 2 ed il suo perimetro è di 32cm; calcola le misure dei lati. Determina poi un punto P sul lato di lunghezza maggiore AB in modo che sia $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 112$. [12cm, 4cm; $\overline{PB} = 8$]

112 Dato un triangolo equilatero ABC di lato ℓ, trova un punto P sul lato BC in modo che sia $\overline{AP}^2 - \overline{PC}^2 = \frac{3}{4}\ell^2$.
(Suggerimento; traccia l'altezza AH, indica con x la misura del segmento PC ed applica il teorema di Pitagora al triangolo APH) $\left[\overline{PC} = \frac{1}{4}\ell\right]$