Cap 1. L'EQUIVALENZA DEI POLIGONI

Rivedi la teoria

Figure equivalenti

Due figure A e B sono **equivalenti** se hanno la stessa estensione e in questo caso si scrive $A \doteq B$.
Per stabilire se due figure sono equivalenti si può vedere se sono **equicomposte**, cioè se è possibile scomporle in parti a due a due congruenti oppure a due a due equivalenti.

I criteri di equivalenza

I seguenti possono essere considerati dei criteri che ci permettono di stabilire quando due poligoni sono equivalenti.

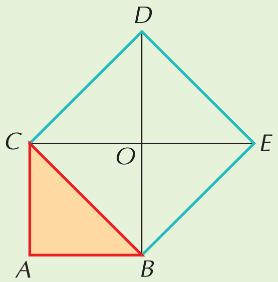
- Due parallelogrammi sono equivalenti se hanno basi e altezze congruenti.
- Un parallelogramma è equivalente a un triangolo che ha la stessa base del parallelogramma e altezza doppia di quella del parallelogramma, oppure che ha la stessa altezza del parallelogramma e base doppia, oppure ancora è equivalente al doppio di un triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza.
- Due triangoli sono equivalenti se hanno basi e altezze congruenti.
- Un trapezio è equivalente a un triangolo che ha per base la somma delle basi del trapezio e altezza congruente a quella del trapezio.
- Un poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente ad un triangolo che ha per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza.

Fai gli esercizi

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Sia ABC un triangolo isoscele e rettangolo in A; costruito il quadrato avente per lato l'ipotenusa, dimostriamo che esso è equivalente al quadruplo del triangolo ABC.

Tracciamo le diagonali del quadrato e osserviamo che ciascuno dei triangoli ottenuti è congruente al triangolo ABC. Di conseguenza il quadrato è equivalente a quattro triangoli.



2 Dato un triangolo isoscele di base BC, traccia la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A e da C la perpendicolare a tale bisettrice che la incontra in H. Tracciato il segmento BH, dimostra che i triangoli AHB e AHC sono equivalenti.

3 Disegna un parallelogramma *ABCD*, indica con *M* il punto medio del lato *AB* e traccia i segmenti che congiungono *M* con i punti *C* e *D*. Dimostra che la somma dei triangoli *AMD* e *BMC* è equivalente al triangolo *DMC*.

4 In un trapezio *ABCD* rettangolo in *A* e in *D*, la base maggiore *CD* è doppia della base minore *AB*; tracciata la diagonale *BD* dimostra che il triangolo *DBC* è equivalente al doppio del triangolo *ABD*.

Rivedi la teoria

I triangoli rettangoli godono di proprietà particolari enunciate dai seguenti teoremi.

- **Teorema di Pitagora.** In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
- **Il primo teorema di Euclide.** In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.
- **Secondo teorema di Euclide**. In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

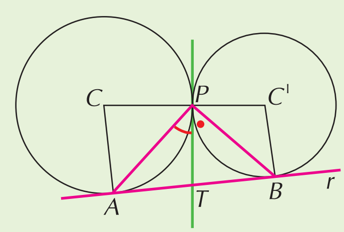
Fai gli esercizi

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo due circonferenze tangenti esternamente in *P* e sia *r* una tangente comune alle due circonferenze non passante per *P*; tale retta incontra le due circonferenze in *A* e in *B*. Dimostriamo che il quadrato costruito su *AB* è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui segmenti *PA* e *PB*.

Basta dimostrare che il triangolo *ABP* è rettangolo in *P*. Osserva allora che, indicato con *T* il punto di intersezione della retta tangente in *P* con la retta *r*, l'angolo $\widehat{APT}$ è metà dell'angolo $\widehat{ACP}$ perché ....; analogamente l'angolo $\widehat{BPT}$ è metà dell'angolo $\widehat{PC'B}$ perché ....

Allora l'angolo $\widehat{APB}$ è retto perché ....



6 Un trapezio rettangolo ha il lato obliquo che è perpendicolare alla diagonale. Dimostra che il quadrato costruito sulla base maggiore è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri tre lati.

7 Due circonferenze aventi i raggi uno il doppio dell'altro sono tangenti esternamente in *P*; tracciata una delle tangenti comuni non passante per *P*, siano *A* e *B* i punti di tangenza. Dimostra che il quadrato costruito sul segmento *AB* è 8 volte il quadrato del raggio della circonferenza minore.
(Suggerimento: la figura del problema è strutturalmente simile a quella dell'esercizio 5; tieni presenti quindi i risultati ottenuti in quell'esercizio e che inoltre anche il triangolo *CTC'* è rettangolo in *T*)

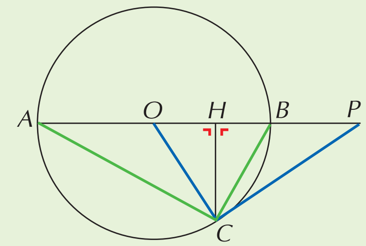
8 **ESERCIZIO GUIDA**

Sia *AB* il diametro di una circonferenza e *P* un punto ad essa esterno che appartiene alla retta *AB* (*B* è più vicino a *P* di *A*). Tracciamo una retta per *P* tangente alla circonferenza e indichiamo con *C* il punto di tangenza; sia poi *H* la proiezione di *C* sulla retta *AB*. Dimostriamo che il rettangolo che ha per lati i segmenti *OH* e *HP* è equivalente al rettangolo che ha per lati i segmenti *AH* e *HB*.

Il triangolo OCP è rettangolo in C perché ....;
allora $q(CH) \doteq$ ....

Il triangolo ABC è rettangolo in C perché ....;
allora $q(CH) \doteq$ ....

Confrontando le due relazioni si ottiene ....



9 Sia AB una corda di una circonferenza di centro O e sia CD il diametro ad essa perpendicolare che la incontra in M. Dimostra che $q(AM) \doteq r(CM, MD)$.

10 Sul prolungamento del diametro AB di una circonferenza di centro O, dalla parte di B, prendi un punto P e traccia la tangente PT. Indicata con H la proiezione di T sul diametro AB, dimostra che $q(AB) \doteq 4r(OH, OP)$.

11 Un trapezio isoscele è circoscritto a una circonferenza; dimostra che il quadrato del raggio è equivalente al rettangolo avente per lati la metà delle basi del trapezio.
(Suggerimento: dimostra dapprima che il triangolo che ha per vertici il centro della circonferenza e gli estremi di uno dei lati obliqui è rettangolo)

Cap 2. Grandezze, misura, proporzionalità e aree

Rivedi la teoria

Grandezze omogenee e misure

Un insieme A di elementi costituisce una **classe di grandezze omogenee** se:

- tutti gli elementi di A si possono confrontare fra loro in modo che, presi due di essi a e b, si può sempre stabilire se $a > b$, $a = b$ oppure $a < b$
- sommando due qualsiasi elementi di A si ottiene ancora un elemento di A: $a + b = c \quad \text{e} \quad c \in A$.

Per **misurare una grandezza** A occorre sceglierne un'altra U ad essa omogenea come unità; si possono presentare due situazioni:

- le grandezze A e U hanno un sottomultiplo comune ed in questo caso la misura di A rispetto a U è espressa da un numero razionale che si trova in questo modo: se il sottomultiplo comune è contenuto m volte in A e n volte in U allora la misura di A è $\frac{m}{n}$
- le grandezze A e U non hanno un sottomultiplo comune ed in questo caso la misura di A rispetto a U è espressa da un numero irrazionale.

In ogni caso la misura di una grandezza si esprime sempre mediante un numero reale.

I rapporti

Il **rapporto** fra due grandezze A e B è il numero reale che esprime la misura di A quando B rappresenta l'unità di misura. Tuttavia, se le misure di A e di B sono espresse in funzione di una stessa unità U comune ad entrambe, allora il rapporto fra A e B è uguale al quoziente fra le loro misure.
Per esempio, se un segmento AB è lungo 36cm e un segmento CD è lungo 8dm, allora il rapporto fra i due

segmenti si può calcolare se riportiamo entrambe le misure alla stessa unità, per esempio il centimetro; in questo caso, poiché 8dm = 80cm:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{36}{80} = \frac{9}{20}$$

Le proporzioni

Quattro grandezze A, B, C e D (A e B omogenee tra loro, C e D omogenee tra loro) sono in proporzione se il rapporto fra le prime due è uguale al rapporto fra le seconde due, cioè se $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; quest'ultima relazione viene di solito scritta nella forma

$$A : B = C : D$$

Inoltre, visto che il rapporto fra due grandezze è uguale al quoziente fra le loro misure, se quattro grandezze sono in proporzione lo sono anche le loro misure. Allora, indicando con a, b, c, d tali misure, dalla relazione precedente si deduce che

$$a : b = c : d$$

Le proprietà delle proporzioni

Se a, b, c, d sono quattro numeri non nulli in proporzione, cioè tali che $a : b = c : d$ allora valgono le seguenti proprietà:

a. fondamentale $bc = ad$

b. del permutare $a : c = b : d$ oppure $d : b = c : a$

c. dell'invertire $b : a = d : c$

d. del comporre $(a + b) : b = (c + d) : d$ oppure $(a + b) : a = (c + d) : c$

e. dello scomporre $(a - b) : b = (c - d) : d$ oppure $(a - b) : a = (c - d) : c$ se $a > b$ e $c > d$

Tali proprietà, ad esclusione di quella fondamentale perché non ha senso in generale moltiplicare due grandezze omogenee (ad esempio due pesi o due angoli), valgono anche per le corrispondenti proporzioni fra grandezze se assumiamo che esse siano tutte omogenee fra loro.

Fai gli esercizi

1 Di tre grandezze omogenee A, B, C si sa che A è il triplo di B e che B, a sua volta, è i $\frac{4}{3}$ di C. Calcola i seguenti rapporti: $\frac{B}{A}$ $\frac{C}{B}$ $\frac{A}{C}$. $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 4\right]$

2 Se A, B, C, D sono quattro grandezze omogenee fra loro e se $A : B = C : D$, quali fra le seguenti proporzioni sono vere?

a. $3A : 3B = 2C : 2D$ **b.** $3A : B = 2C : D$ **c.** $A : 4B = C : 4D$

d. $2A : C = 2B : D$ **e.** $\frac{1}{2}D : B = \frac{1}{2}C : A$ **f.** $B : 6A = C : 6D$ **[a., c., d., e.]**

3 Dalla proporzione $A : B = C : D$, se $\frac{D}{B} = \frac{5}{6}$, che cosa si può dire del rapporto $\frac{A}{C}$? $\left[\frac{A}{C} = \frac{6}{5}\right]$

4 Un segmento AB lungo 35cm è diviso in due parti da un punto P ad esso interno tali che $\frac{PA}{PB} = \frac{7}{3}$. Quanto sono lunghi i segmenti PA e PB? [24,5cm; 10,5cm]

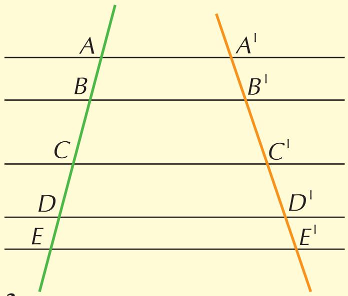
5 Il rapporto fra l'angolo al vertice e l'angolo alla base di un triangolo isoscele è uguale a $\frac{2}{5}$. Quanto misurano gli angoli del triangolo? [75°, 75°, 30°]

Rivedi la teoria

Grandezze proporzionali

Due insiemi di grandezze sono **direttamente proporzionali** se sono in corrispondenza biunivoca e se il rapporto fra due grandezze qualsiasi del primo insieme è uguale al rapporto fra le corrispondenti due del secondo. Due insiemi di grandezze sono **inversamente proporzionali** se sono in corrispondenza biunivoca e se il rapporto fra due grandezze qualsiasi del primo insieme è uguale al rapporto inverso fra le corrispondenti due del secondo.

Sappiamo poi che, per verificare la proporzionalità diretta fra due insiemi di grandezze, possiamo ricorrere al **criterio generale di proporzionalità** che dice: condizione necessaria e sufficiente affinché due insiemi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che venga conservata la congruenza e la somma.



a.

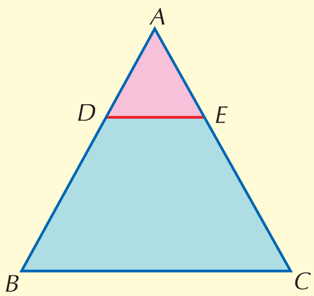
Il teorema di Talete e le sue conseguenze

Il **teorema di Talete** ci garantisce che se abbiamo un fascio di rette parallele, tagliato da due trasversali, i segmenti che si individuano sulla prima trasversale sono proporzionali a quelli corrispondenti che si determinano sulla seconda (***figura a***):

$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = ...$

Conseguenza di questo teorema è che, se in un triangolo si traccia una corda parallela ad uno dei lati, allora (***figura b***):

- gli altri due lati restano divisi in parti proporzionali $AD : DB = AE : EC$
- il triangolo che si ottiene ha i lati proporzionali a quelli del primo $AD : AB = AE : AC = DE : BC$



b.

Fai gli esercizi

6 Stabilisci se i seguenti insiemi di grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali o se non esiste proporzionalità fra essi.

a. $A =$ {segmenti}; $B =$ {perimetri dei quadrati che hanno per lato i segmenti dell'insieme A}

b. $A =$ {quantità di materiale necessaria per la produzione}
$B =$ {costo complessivo del materiale per la produzione di un oggetto}

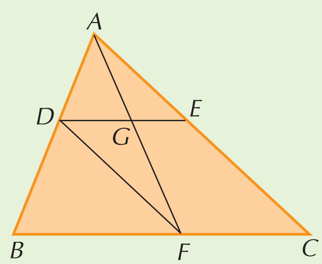
c. $A =$ {tempi necessari a percorrere una certa distanza s}
$B =$ {velocità media tenuta per percorrere la distanza s}

d. $A =$ {segmenti}; $B =$ {aree dei quadrati che hanno per lato i segmenti dell'insieme A}

7 **ESERCIZIO GUIDA**

Per un punto D del lato AB di un triangolo ABC traccia la parallela al lato BC che incontra AC in E e la parallela al lato AC che incontra BC in F; sia poi G il punto di intersezione di AF con DE. Dimostra che $AE : DF = AG : GF$.

Se consideriamo il triangolo AFC, essendo $GE \parallel FC$, possiamo scrivere la proporzione $AE : ...... = ... : ....$
Osserviamo poi che il quadrilatero $DECF$ è un ...., quindi $EC \cong$ ....



8 Disegna un quadrilatero $ABCD$ e traccia le sue diagonali che si incontrano in P; da P traccia la parallela ad AB che incontra AD in Q e la parallela a BC che incontra CD in R. Dimostra che:
a. $DQ : DA = DR : DC$
b. QR è parallelo ad AC
(Suggerimento: considera il triangolo DAB e, tenendo conto che $PQ \parallel AB$, scrivi la proporzione fra le parti in cui restano divisi i suoi lati; considera poi il triangolo DCB e ripeti lo stesso ragionamento. Confrontando le proporzioni ottenute ....)

9 Sono dati due segmenti AB e CD ed un terzo segmento PQ. Spiega come puoi trovare un punto S su PQ in modo che PS e SQ siano proporzionali ad AB e CD.
(Suggerimento: traccia una semiretta di origine P e riporta su di essa, a partire da P, i segmenti AB e CD in modo che siano adiacenti; se ora tracci ....)

10 Nel triangolo ABC isoscele di base BC conduci la mediana BM relativa al lato AC e, detto N il punto medio di BC, traccia il segmento MN. Dimostra che anche il triangolo MNC è isoscele. Come deve essere il triangolo ABC affinché anche il triangolo BNM sia isoscele?

Rivedi la teoria

Le formule per il calcolo delle aree dei poligoni

I teoremi sull'equivalenza e le considerazioni sulla misura permettono di individuare delle regole per il calcolo delle aree S dei poligoni fondamentali; le ricordiamo di seguito:

- area del quadrato di lato ℓ: $S = \ell^2$
- area del rettangolo di lati a e b: $S = a \cdot b$
- area del parallelogramma di base b e altezza h: $S = b \cdot h$
- area del triangolo di base b e altezza h: $S = \frac{1}{2} b \cdot h$
- area del trapezio di basi b_1 e b_2 e altezza h: $S = \frac{1}{2} h \cdot (b_1 + b_2)$
- area del rombo di diagonali d_1 e d_2: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$
- area del poligono di perimetro $2p$ circoscritto ad una circonferenza di raggio r: $S = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot r = p \cdot r$

Relazioni fra i lati di poligoni particolari

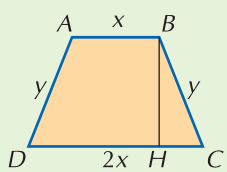
Ricordiamo alcune fra le relazioni più significative che intervengono spesso nella risoluzione di problemi soprattutto di tipo numerico:

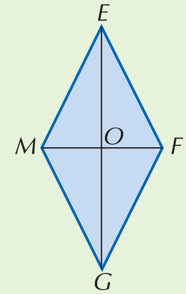
- in un quadrato, fra il lato ℓ e la diagonale d sussiste la relazione $d = \ell\sqrt{2}$
- in un triangolo equilatero, fra il lato ℓ e l'altezza h sussiste la relazione $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
- il lato ℓ del quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r è $\ell = r\sqrt{2}$
- il lato ℓ del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r è $\ell = r\sqrt{3}$
- il lato ℓ dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r è $\ell = r$

11 **ESERCIZIO GUIDA**

In un trapezio isoscele di perimetro $2p = 34\ell$ la base maggiore è il doppio di quella minore ed inoltre il rapporto fra la somma dei lati obliqui e la somma delle basi è $\frac{5}{12}$. Calcoliamo il perimetro del rombo equivalente al trapezio che ha le diagonali una il doppio dell'altra.

Con riferimento alla figura, indichiamo con x la base minore del trapezio e con y il lato obliquo e riscriviamo le informazioni del problema in funzione di queste variabili (utilizzando due incognite ci servono due equazioni):





$\overline{AB} = x$ $\qquad$ $\overline{CD} = 2x$ $\qquad$ $\overline{AD} = \overline{BC} = y$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 34\ell & \text{perimetro del trapezio} \\ \dfrac{2y}{3x} = \dfrac{5}{12} & \text{rapporto fra la somma dei lati obliqui e delle basi} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che $\begin{cases} x = 8\ell \\ y = 5\ell \end{cases}$ cioè $\overline{AB} = 8\ell$ $\quad \overline{CD} = 16\ell$ $\quad \overline{AD} = \overline{BC} = 5\ell$

Di conseguenza, applicando il teorema di Pitagora al triangolo BHC, ottieni che $BH =$ ....

L'area del trapezio, e quindi anche quella del rombo, è perciò $S =$ ....

Se adesso indichi con x la diagonale minore del rombo $EFGM$ si ha che:

$$\overline{MF} = x \qquad \overline{EG} = 2x \qquad \text{con } x > 0 \qquad \rightarrow \qquad S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2$$

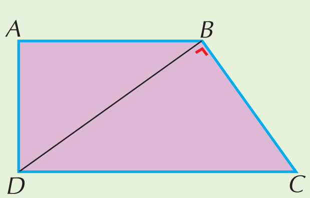
e deve essere $x^2 =$ .... da cui $x =$ ....

Per trovare la lunghezza del lato del rombo basta adesso applicare il teorema di Pitagora al triangolo EOF. Il perimetro risulta quindi essere uguale a $12\sqrt{5}\ell$.

12 **ESERCIZIO GUIDA**

Le basi di un trapezio rettangolo misurano 16cm e 25cm e la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo. Trova il perimetro e l'area del trapezio.

Dati del problema: $\overline{AB} = 16$
$\overline{DC} = 25$
$DB \perp BC$
$AD \perp DC$



Per trovare il perimetro devi prima calcolare le misure del lato AD, che rappresenta anche l'altezza del trapezio, e del lato BC. Tracciata anche l'altezza BH e considerato che $\overline{DH} =$ .... e che $\overline{HC} =$ ...., puoi applicare il secondo teorema di Euclide al triangolo DBC e trovare così la misura di BH che è anche quella di AD.
Per trovare BC puoi adesso applicare il teorema di Pitagora al triangolo BHC oppure il primo teorema di Euclide al triangolo DBC.

$[2p = 68\text{cm};\ \text{area} = 246\text{cm}^2]$

13 Un rettangolo è inscritto in una circonferenza il cui raggio misura 25cm; trova la sua area sapendo che un lato è i $\frac{4}{5}$ del diametro. [$1\,200\text{cm}^2$]

14 Di un triangolo rettangolo si sa che un cateto misura 20cm e l'altezza relativa all'ipotenusa misura 12cm. Trova il perimetro e l'area del triangolo. [$2p = 60\text{cm}$; area $= 150\text{cm}^2$]

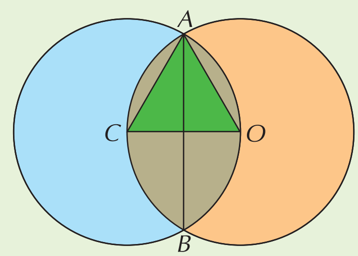
15 Un triangolo ABC isoscele di base BC è circoscritto ad una circonferenza e di esso si sa che il lato AC è 10,4cm; sia N il punto di tangenza del lato AC con la circonferenza. Se $\frac{AN}{NC} = \frac{8}{5}$, calcola:

a. l'area del triangolo ABC

b. la lunghezza del raggio della circonferenza. $\left[\textbf{a. } 38{,}4\text{cm}^2;\ \textbf{b. } \frac{8}{3}\text{cm}\right]$

16 **ESERCIZIO GUIDA**

Due circonferenze congruenti di raggio $r = 15\text{cm}$ sono secanti e ognuna di esse passa per il centro dell'altra. Dopo aver dimostrato che il triangolo avente per vertici i due centri e uno dei punti di intersezione delle circonferenze è equilatero, calcola la misura della corda comune alle due circonferenze.



Osserviamo che i segmenti CO, CA e OA sono raggi e quindi il triangolo COA è equilatero ed il suo lato è lungo 15cm.

Allora l'altezza ha misura $h = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

La corda AB è il doppio dell'altezza del triangolo e quindi $AB = 15\sqrt{3}\text{cm}$.

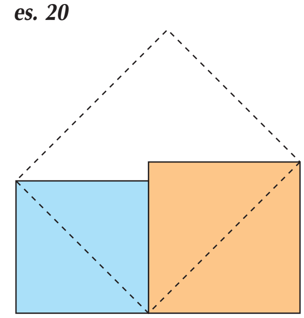
17 Un triangolo rettangolo ha un angolo che misura 60° e l'altezza relativa all'ipotenusa che misura 15cm. Trova l'area del triangolo. [$150\sqrt{3}\text{cm}^2$]

18 Un triangolo equilatero è inscritto in una circonferenza di raggio r; dopo aver dimostrato che la congiungente i punti medi di due suoi lati individua un altro triangolo equilatero, calcola l'area di quest'ultimo. $\left[\frac{3\sqrt{3}}{16}r^2\right]$

19 In un trapezio rettangolo la base minore e l'altezza sono segmenti congruenti e la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo. Se l'area del trapezio è 216m^2 quanto misura il suo perimetro? $\left[12\left(4+\sqrt{2}\right)\text{m}\right]$

20 La somma delle aree dei due quadrati in figura è 2825m^2 mentre il rettangolo che ha per lati le diagonali dei due quadrati ha area $2\,800\text{m}^2$. Quanto misura il lato di ciascun quadrato? [40m, 35m]

es. 20



Rivedi la teoria

La lunghezza della circonferenza

Sappiamo che i perimetri dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza sono minori dei perimetri dei poligoni regolari ad essa circoscritti e che i due insiemi costituiscono una coppia di classi contigue. Viene naturale allora pensare alla circonferenza come all'elemento separatore delle due classi, vale a dire che, al crescere indefinitamente del numero dei lati dei poligoni, la circonferenza tende a confondersi con il contorno di tali poligoni. Questa lunghezza separatrice si dice **circonferenza rettificata** e, indicata con C tale lunghezza e con r il raggio della circonferenza, si ha che

$$\boldsymbol{C = 2\pi r}$$

dove π è un numero irrazionale il cui valore approssimato a meno di 0,01 è 3,14.

L'area del cerchio

L'area dei poligoni inscritti in un cerchio è minore dell'area dei poligoni ad esso circoscritti; i due insiemi costituiscono una coppia di classi contigue che ammette il cerchio come elemento separatore.
Abbiamo poi dimostrato che un cerchio ha la stessa area di un triangolo che ha per base un segmento congruente alla circonferenza rettificata e per altezza un segmento congruente al raggio; indicata con S l'area del cerchio, si ha quindi che

$$\boldsymbol{S = \pi r^2}$$

Fai gli esercizi

Completa le seguenti tabelle determinando gli elementi mancanti (le misure indicate sono tutte riferite alla stessa unità).

21

raggio	diametro	C
12		
	6	
		25π
	84	
		32π
1,8		

22

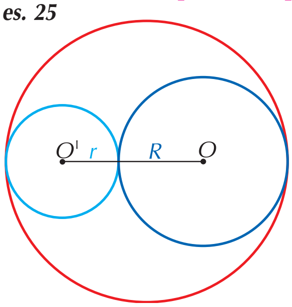
raggio	diametro	S
5		
	8	
		81π
	3,2	
		$1{,}44\pi$
3,4		

23 Un triangolo equilatero di lato a è inscritto in una circonferenza; esprimi, in funzione di a, la lunghezza di ciascuno degli archi in cui i vertici del triangolo dividono la circonferenza. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{9}a\pi\right]$

24 In un rombo una diagonale ed il lato misurano rispettivamente 18cm e 12cm. Calcola la lunghezza della circonferenza in esso inscritta. $\left[\frac{9}{2}\sqrt{7}\pi\text{cm}\right]$

25 Due circonferenze sono tangenti esternamente ed entrambe sono tangenti ad una terza circonferenza che le contiene al suo interno (vedi la figura). Verifica che la lunghezza della circonferenza più esterna è congruente alla somma delle altre due.

es. 25



26 Due circonferenze sono tangenti internamente e il raggio della maggiore è doppio di quello della minore. Indicato con r il raggio della circonferenza più piccola, trova l'area della parte di piano delimitata dalle due circonferenze in funzione di r. $[3\pi r^2]$

27 I centri O e O' di due circonferenze secanti distano 10cm; la corda comune AB è lunga 9,6cm e i raggi OA e $O'A$ sono perpendicolari. Calcola il rapporto fra le aree dei due cerchi. $\left[\frac{9}{16}\right]$

28 Due circonferenze congruenti di raggio r sono secanti e ognuna di esse passa per il centro dell'altra. Calcola il rapporto fra l'area della parte comune ai due cerchi e l'area della superficie da essi occupata. $\left[\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}\right]$

Verifica del recupero

1 Completa le seguenti proposizioni in modo che risultino vere.

a. Due parallelogrammi sono equivalenti se ....

b. Un parallelogramma ed un rettangolo sono equivalenti se ....

c. Un parallelogramma ed un triangolo sono equivalenti se ....

d. Due triangoli sono equivalenti se ....

e. Un poligono circoscritto ad una circonferenza ed un triangolo sono equivalenti se ....

f. Un trapezio ed un triangolo sono equivalenti se ....

1 punto

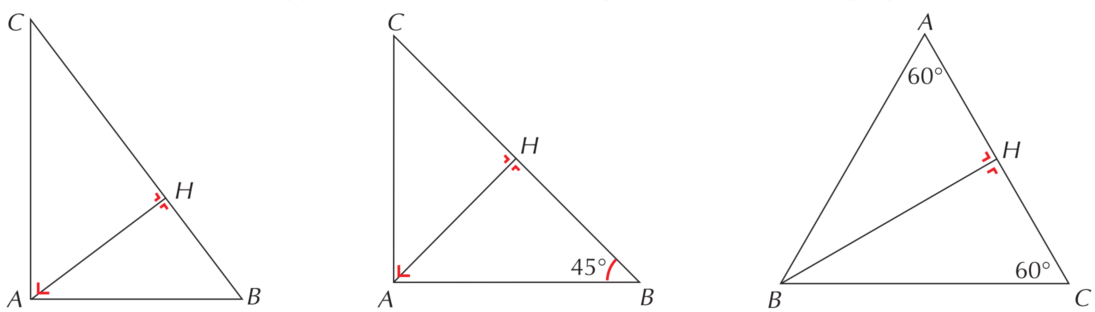
2 Due parallelogrammi *ABCD* e *PQDC* sono uniti per il lato *CD* e si trovano in semipiani opposti rispetto alla retta di tale lato. Ricordando che anche il quadrilatero *ABPQ* è un parallelogramma, dimostra che la somma di *ABCD* con *PQDC* è equivalente al parallelogramma *ABPQ*.

1 punto

3 Disegna un trapezio e traccia una delle sue diagonali; dimostra che una retta parallela alle basi divide la diagonale in parti proporzionali a quelle individuate sui lati.

1 punto

4 Riferendoti alle figure rappresentate di seguito, completa le uguaglianze proposte.



a. $\overline{AB}^2 = \overline{HB} \cdot$ ....

$\overline{AH}^2 =$ .... · ....

b. $\overline{BC} = \overline{AB} \cdot$ ....

$\overline{AH} = \overline{AB} \cdot$ ....

c. $\overline{BH} = \overline{AC} \cdot$ ....

$\overline{HC} = \overline{BH} \cdot$ ....

1,5 punti

5 In un cerchio di diametro 150 cm è inscritto un triangolo isoscele che contiene il centro del cerchio e che ha la base di 144 cm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.

1 punto

6 Un trapezio isoscele, la cui area misura $2000 cm^2$, è circoscritto ad una circonferenza di diametro 40cm. Calcola la misura delle basi del trapezio.

1,5 punti

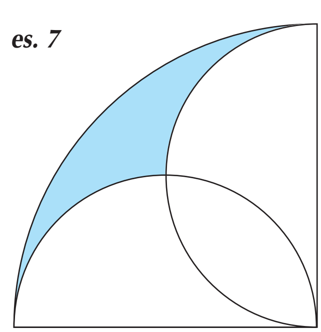
7 Considera un quadrante di una circonferenza di raggio *r* e inscrivi in esso due semicirconferenze aventi per diametro i raggi che lo delimitano (osserva la figura a lato); calcola la lunghezza del contorno della parte in colore.

1,5 punti

8 Sui lati di un quadrato ed esternamente ad esso costruisci le semicirconferenze che hanno per diametro i lati stessi. Dimostra che la somma delle quattro semicirconferenze sta al perimetro del quadrato come la loro area sta all'area del quadrato.

1,5 punti

es. 7



Soluzioni

1 **a.** hanno le basi e le altezze congruenti
b. hanno le basi e le altezze congruenti
c. hanno le basi congruenti e l'altezza del triangolo è doppia di quella del parallelogramma (oppure hanno altezze congruenti e la base del triangolo è doppia di quella del parallelogramma)
d. hanno basi ed altezze congruenti
e. il triangolo ha la base congruente al perimetro del poligono e l'altezza congruente all'apotema (il raggio del cerchio inscritto)
f. hanno la stessa altezza ed il triangolo ha come base la somma delle basi del trapezio.

2 L'altezza del parallelogramma *ABPQ* è congruente alla somma delle altezze degli altri due parallelogrammi ed inoltre tutti e tre i parallelogrammi hanno la stessa base.

3 Si applica il teorema di Talete ai due triangoli in cui la diagonale divide il trapezio.

4 **a.** $\overline{AB}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{CB}$, $\quad \overline{AH}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$
b. $\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}$, $\quad \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
c. $\overline{BH} = \overline{AC} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \overline{HC} = \overline{BH} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5 $2p = 384\text{cm}$; area $= 6912\text{cm}^2$

6 80cm; 20cm

7 πr

8 Indicata con ℓ la lunghezza del lato del quadrato, la somma delle quattro semicirconferenze è $2\pi\ell$; il perimetro del quadrato è 4ℓ; l'area delle quattro semicirconferenze è $\frac{1}{2}\pi\ell^2$; l'area del quadrato è ℓ^2. La relazione $2\pi\ell : 4\ell = \frac{1}{2}\pi\ell^2 : \ell^2$ è una proporzione perché soddisfa la proprietà fondamentale.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	
Punteggio									

Valutazione in decimi

Math in English

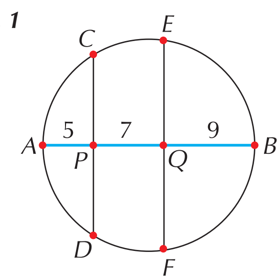
Glossary

chord	corda	**shaded**	ombreggiato
dodecagon	dodecagono	**square**	quadrato
secant	(retta) secante	**tangent**	(retta) tangente

1 In the circle shown, AB is the diameter. Chords CD and EF are perpendicular to AB. The lenghts AP, PQ and QB are 5, 7 and 9 respectively. Determine the sum of the lenght of CP and EQ.

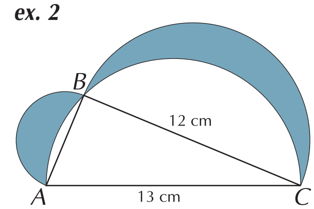
a. $4\sqrt{5}+2\sqrt{3}$ **b.** $2\sqrt{5}+12\sqrt{3}$ **c.** $4\sqrt{5}+6\sqrt{3}$
d. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ **e.** $6\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

ex. 1



2 Consider the region on the right hand formed by three semicircles with diameters AB, BC and AC, where point B lies on the semicircle defined by diameter AC. Find the area of the shaded region.

ex. 2

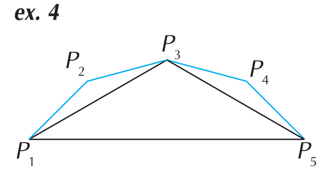


3 Circle A and circle B are externally tangent and have radii of 4cm and 10cm respectively. If an external tangent is drawn to the two circles that intersects circle A at point C and intersects circle B at point D, find the length of CD.

4 In the figure shown, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 is a section of a regular dodecagon with each side lenght of 2. Find the area of triangle $P_1P_3P_5$.

a. $3+2\sqrt{3}$ **b.** $5+4\sqrt{3}$ **c.** $6+2\sqrt{3}$
d. $8+4\sqrt{3}$ **e.** $8+2\sqrt{3}$

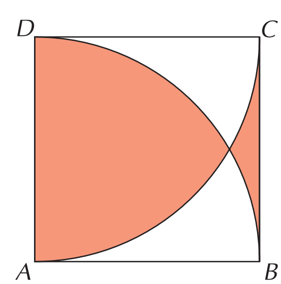
ex. 4



5 In the figure shown, $ABCD$ is a square. $AB = 1$, $\overset{\frown}{AC}$ and $\overset{\frown}{BD}$ are arcs with radius 1 and centres at D and A respectively. What is the difference between the areas of the two shaded regions?

a. $\frac{\pi}{2}-1$ **b.** $1-\frac{\pi}{4}$ **c.** $\frac{\pi}{3}-1$
d. $1-\frac{\pi}{6}$ **e.** $\pi-1$

ex. 5



1 c. **2** $30cm^2$ **3** $4\sqrt{10}cm$ **4** a. **5** a.