Le equazioni simmetriche

Si chiamano **simmetriche** quelle equazioni goniometriche, nelle sole funzioni $\sin x$ e $\cos x$, in cui scambiando fra loro $\sin x$ e $\cos x$ si ottiene la stessa equazione.
Sono ad esempio simmetriche le equazioni

$2\sin x - \sin x \cos x + 2\cos x = 2$

$\sin^3 x + \sin x + \cos x + \cos^3 x = 0$

Tali equazioni si risolvono operando un cambiamento di variabile e ponendo

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} + y}$$

Esempio.

Risolviamo la prima delle equazioni proposte:

$$2\sin x - \sin x \cos x + 2\cos x = 2$$

Operiamo la sostituzione indicata:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right) = 2$$

da cui, applicando le formule di addizione degli angoli

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y\right) = 2$$

$$2\sqrt{2}\cos y - \frac{1}{2}\cos^2 y + \frac{1}{2}\sin^2 y = 2$$

$$2\cos^2 y - 4\sqrt{2}\cos y + 3 = 0$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione nella sola funzione $\cos y$ che sappiamo risolvere:

$$\cos y = \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \quad \text{equazione impossibile} \quad \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 1\right) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \quad y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

Ritornando alla variabile x si hanno le seguenti soluzioni:

$$y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 2k\pi$$

ESERCIZI

1 $\cos x + 2 \sin x \cos x + \sin x + 1 = 0$ $\left[\frac{3}{4}\pi + k\pi;\ \pi + 2k\pi;\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

2 $\sin x + \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$ $\left[2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

3 $\sin x - 2\sqrt{2} \sin x \cos x + \cos x = 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{11}{12}\pi + 2k\pi;\ \frac{19}{12}\pi + 2k\pi\right]$

4 $4 \sin x \cos x = -\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$ $\left[\frac{7}{12}\pi + 2k\pi;\ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi;\ \frac{23}{12}\pi + 2k\pi\right]$

5 $\sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x + \sqrt{2}$ $\left[\frac{1}{12}\pi + 2k\pi;\ \frac{5}{12}\pi + 2k\pi;\ \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

6 $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2} \sin x \cos x = 2 + \sqrt{2}$ $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

7 $\frac{3}{2}\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2(1 + \sin x \cos x)$ $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{7}{12}\pi + 2k\pi;\ \frac{23}{12}\pi + 2k\pi\right]$