

Gli sviluppi della teoria degli insiemi

L'uomo ha usato il concetto di insieme, pur senza rendersene conto, fin dall'antichità, tanto che ancora oggi i non esperti di matematica se ne servono a livello intuitivo. Pensa al pastore che parla del suo gregge considerandolo un'unica entità; all'insegnante che si rivolge agli studenti della sua classe come ad un unico soggetto; al politico che in un comizio parla alla platea come ad un gruppo, formato sì da tanti elementi, ma che si possono considerare come un tutt'uno. Nonostante questo concetto sia stato utilizzato dall'uomo già dai tempi antichi, bisogna arrivare alla fine dell'800 per trovare riferimenti ad una teoria organica.

La teoria degli insiemi ha una particolarità: è una delle poche teorie matematiche ideate e sviluppate quasi completamente da un solo uomo.

Quest'uomo è **Georg Cantor**, che viene appunto considerato il "padre" della teoria degli insiemi. Georg Cantor nacque nel 1845 in Russia, a San Pietroburgo, da padre danese, ma visse e studiò a lungo in Germania. Il padre di Cantor avrebbe voluto farne un ingegnere, ma egli riuscì a far prevalere la sua passione per la matematica pura.

Dopo essersi laureato brillantemente all'Università di Berlino, a 29 anni pubblicò il suo primo lavoro. Come spesso accade, tuttavia, il genio di Cantor non fu compreso.

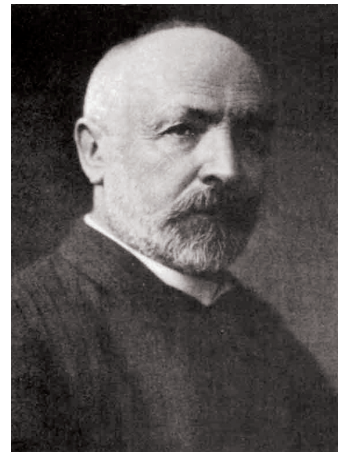
Il suo lavoro fu oggetto di attacchi e polemiche che lo amareggiarono, specialmente quelli da parte del matematico Leopold Kronecker, che era stato suo maestro. Anche a causa di queste delusioni, Georg fu un uomo infelice, frequentemente colpito da crisi depressive che degenerarono in una malattia mentale che si aggravò fino a portarlo alla morte, nel 1918.

Per Cantor, la natura degli elementi degli insiemi con cui si opera non ha importanza; il modo di eseguire una operazione fra insiemi non varia sia che gli elementi degli insiemi considerati siano automobili, pesci, numeri o figure geometriche. Sono le leggi delle operazioni a caratterizzare l'insieme risultato, non la natura degli elementi su cui si opera. Questo fatto ci fa intuire come la teoria degli insiemi abbia avuto una portata unificante per i vari rami della matematica. Ad esempio, mediante questa teoria, l'operazione di addizione fra numeri può essere ricondotta a regole più generali che comprendono anche «l'addizione» fra figure geometriche.

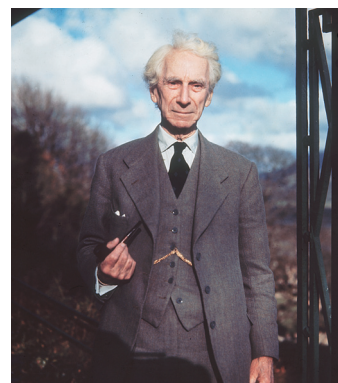
Gli studi di Cantor diedero origine alla cosiddetta **teoria ingenua degli insiemi**, non priva però di contraddizioni. Esaminiamo, ad esempio, il seguente paradosso. Consideriamo l'insieme degli uomini di un villaggio che non si fanno la barba da soli, ma se la fanno fare dall'unico barbiere esistente in quel villaggio. Il barbiere appartiene all'insieme oppure no?

Se vi appartenesse non si raderebbe da solo, ma si farebbe radere dal barbiere, cioè da se stesso; quindi in realtà egli si rade da solo, cioè non appartiene all'insieme. Ma se egli non appartiene all'insieme, cioè se si rade da solo, in ogni caso, essendo barbiere, si fa radere dal barbiere. Quindi il barbiere appartiene e non appartiene nello stesso tempo all'insieme. Una contraddizione!

Il primo a porre in evidenza le contraddizioni della teoria ingenua degli insiemi fu il matematico e filosofo inglese **Bertrand Russell** (1872-1970), in una famosa lettera che egli scrisse nel 1902 al collega tedesco Gottlob Frege. La scoperta della "antinomia di Russell" (di cui il "paradosso del barbiere" costituisce un esempio) e di altre contraddizioni analoghe pose in crisi non solo la teoria insiemistica, ma tutta la vasta parte della matematica, che da essa derivava alcuni concetti fondamentali. Cominciò così il cosiddetto "periodo della crisi dei fondamenti" della matematica. Esso fu superato grazie a studi successivi che limitavano e precisavano i criteri secondo cui si può affermare che un elemento appartiene (o meno) ad un insieme.



Georg Cantor



Bertrand Russell