Concetti chiave e regole

L'ellisse e la sua equazione

L'ellisse è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi. L'equazione di un'ellisse con centro nell'origine e assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani è:

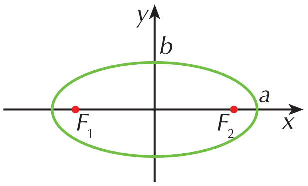
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

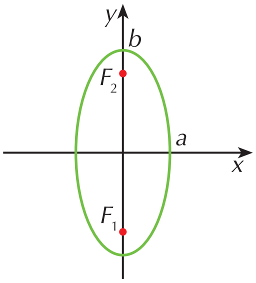
dove a rappresenta il semiasse appartenente all'asse delle ascisse
b rappresenta il semiasse appartenente all'asse delle ordinate

Le caratteristiche di un'ellisse

Le caratteristiche di un'ellisse si possono ricavare dalla sua equazione:

- i vertici sono i punti di coordinate $(\pm a, 0)$ $(0, \pm b)$
- i fuochi appartengono all'asse x se è $a > b$ $F\left(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$





- i fuochi appartengono all'asse y se è $a < b$ $F\left(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2}\right)$

L'eccentricità

L'eccentricità e di un'ellisse è definita come il rapporto fra la semidistanza focale c ed il semiasse maggiore:

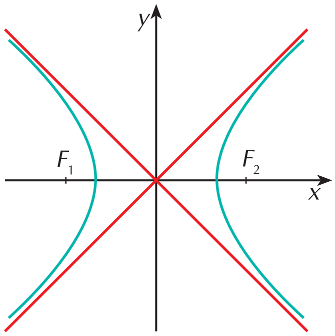
$$e = \frac{c}{\text{semiasse maggiore}}$$

Essa rappresenta lo "schiacciamento" dell'ellisse sulla retta del semiasse maggiore ed è un numero reale compreso fra 0 e 1; se $e = 0$ l'ellisse diventa una circonferenza, se $e = 1$ l'ellisse degenera nel segmento individuato dai fuochi.

L'iperbole e la sua equazione

L'iperbole è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi. L'equazione di un'iperbole che ha centro nell'origine e assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani è

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se i fuochi appartengono all'asse delle ascisse
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ se i fuochi appartengono all'asse delle ordinate



Le caratteristiche di un'iperbole

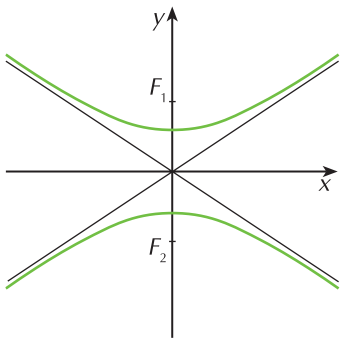
Le caratteristiche di un'iperbole si possono ricavare dalla sua equazione:

- nel caso dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:
  - a rappresenta il semiasse trasverso

- b rappresenta il semiasse non trasverso
- i vertici reali sono i punti di coordinate $(-a, 0) \quad (a, 0)$
- i vertici immaginari sono i punti di coordinate $(0, -b) \quad (0, b)$
- i fuochi sono i punti di coordinate $(\pm c, 0)$ dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- gli asintoti hanno equazione $y = \pm \dfrac{b}{a} x$

■ nel caso dell'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$:

- b rappresenta il semiasse trasverso
- a rappresenta il semiasse non trasverso
- i vertici reali sono i punti di coordinate $(0, -b) \quad (0, b)$
- i vertici immaginari sono i punti di coordinate $(-a, 0) \quad (a, 0)$
- i fuochi sono i punti di coordinate $(0, \pm c)$ dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- gli asintoti hanno equazione $y = \pm \dfrac{b}{a} x$



L'eccentricità

L'**eccentricità** e di un'iperbole è definita come il rapporto fra la semidistanza focale c ed il semiasse trasverso:

$$e = \frac{\text{semiasse focale}}{\text{semiasse trasverso}} = \begin{cases} \dfrac{c}{a} & \text{se i fuochi appartengono all'asse } x \\ \dfrac{c}{b} & \text{se i fuochi appartengono all'asse } y \end{cases}$$

Essa rappresenta l'ampiezza dell'iperbole ed è un numero reale maggiore di 1.

Le rette tangenti ad un'ellisse o ad un'iperbole

Per trovare l'equazione della **retta tangente** ad un'ellisse o un'iperbole si deve:

- scrivere l'equazione generale della retta
- impostare il sistema fra l'equazione dell'ellisse/dell'iperbole e l'equazione della retta
- trovare l'equazione risolvente del sistema
- calcolare il discriminante di questa equazione e imporre che sia uguale a zero.

In particolare, se la retta tangente passa per un punto $P(x_0, y_0)$ che appartiene all'iperbole, oltre al metodo illustrato si possono usare le formule di sdoppiamento ponendo nell'equazione dell'ellisse/dell'iperbole:

$x_0 x$ al posto di x^2 $\qquad$ $y_0 y$ al posto di y^2

L'iperbole equilatera

Se in un'iperbole $a = b$, essa si dice **equilatera** e la sua equazione diventa:

- equazione riferita al centro e agli assi:

  $x^2 - y^2 = a^2$ se i fuochi sono sull'asse x $\rightarrow$ $F(\pm a\sqrt{2}, 0)$ asintoti $y = \pm x$

  $x^2 - y^2 = -a^2$ se i fuochi sono sull'asse y $\rightarrow$ $F(0, \pm a\sqrt{2})$ asintoti $y = \pm x$

- equazione riferita agli asintoti:

  $xy = h$ se gli asintoti coincidono con gli assi cartesiani

  La curva ha vertici e fuochi di coordinate:

  – se $h > 0$ $\quad V(\pm\sqrt{h}, \pm\sqrt{h}) \quad F(\pm\sqrt{2h}, \pm\sqrt{2h})$

  – se $h < 0$ $\quad V(\pm\sqrt{-h}, \mp\sqrt{-h}) \quad F(\pm\sqrt{-2h}, \mp\sqrt{-2h})$

La curva di equazione $xy = h$ è il grafico della proporzionalità inversa.

L'eccentricità di un'iperbole equilatera è sempre $e = \sqrt{2}$.

Traslando un'iperbole equilatera riferita agli asintoti si ottiene una nuova iperbole la cui equazione ha la forma

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{con} \quad c \neq 0 \quad \wedge \quad ad - bc \neq 0$$

Essa prende il nome di **funzione omografica** e l'iperbole che rappresenta ha per asintoti le rette

$$y = \frac{a}{c} \qquad \text{e} \qquad x = -\frac{d}{c}$$