Matematica in laboratorio

1. La funzione esponenziale con GeoGebra

Per comprendere le caratteristiche della funzione $y = a^x$ costruiamo il suo grafico utilizzando uno slider; ricordiamo la procedura:

- selezionare il comando 11-*Slider*
- selezionare la voce *Numero* nella finestra di dialogo
- attribuire il nome *a* allo slider
- indicare 0.1 come valore minimo e 4 come valore massimo, con incremento 0.4.

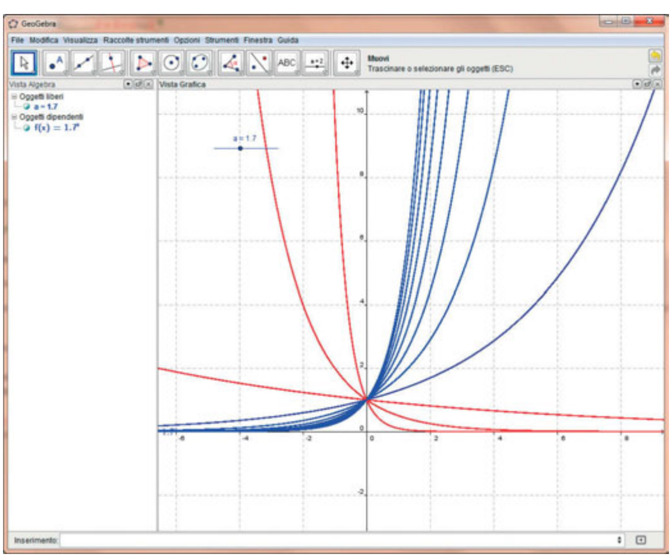
Scriviamo adesso la funzione esponenziale nella riga di inserimento: $f(x) = a$^x

Possiamo adesso far variare manualmente il valore di *a* muovendo il punto sullo slider in modo da ottenere i diversi grafici della funzione, oppure possiamo impostare la variazione automatica; cerchiamo poi di far disegnare i grafici con colori diversi in modo da distinguere le due tipologie fondamentali.

Ecco la procedura:

- apriamo il menu contestuale con il tasto destro del mouse sullo slider
- dal menu *Proprietà* selezioniamo la scheda *Fondamentali*
- mettiamo il segno di spunta sulla voce *animazione attiva*
- spuntiamo anche la voce *Mostra etichetta* in modo da vedere in corrispondenza di ogni grafico la relativa equazione
- selezioniamo adesso la scheda *Avanzate*
- nella riga *Rosso* dei *Colori dinamici* scriviamo $a < 1$: i grafici con una base più piccola di 1 verranno disegnati in rosso
- nella riga Blu scriviamo $a > 1$: i grafici con una base maggiore di 1 verranno disegnati in blu.

Mentre *a* assume i valori che abbiamo specificato mediante lo slider, nella finestra di Algebra vediamo anche l'equazione della corrispondente funzione.
Analizziamo le caratteristiche di questi grafici.
Osserviamo innanzi tutto che tutte le curve, qualunque sia la base, passano per il punto di coordinate (0, 1).
Quando la base *a* si mantiene minore di 1 (curve in rosso), la funzione è decrescente, quando $a > 1$ la funzione è crescente.
La rapidità di crescita dipende dal valore assunto da *a*: più *a* è grande, maggiore è la pendenza della curva.



I grafici derivati

A partire da quelli delle funzioni esponenziali fondamentali, possiamo costruire quello di altre funzioni, sempre di tipo esponenziale, mediante l'applicazione di opportune trasformazioni. In questa esercitazione vogliamo vedere passo passo quali sono le trasformazioni da applicare e in che modo devono essere applicate.
Consideriamo per esempio la funzione di equazione $y = 2^{x-3} + 1$.
Sappiamo che, a partire da quella fondamentale $y = 2^x$ dobbiamo applicare, nell'ordine:

- una prima traslazione di vettore $\vec{v}(3, 0)$
- una seconda traslazione di vettore $\vec{s}(0, 1)$.

Disegniamo dunque la funzione base inserendo la sua equazione attraverso la riga di inserimento.

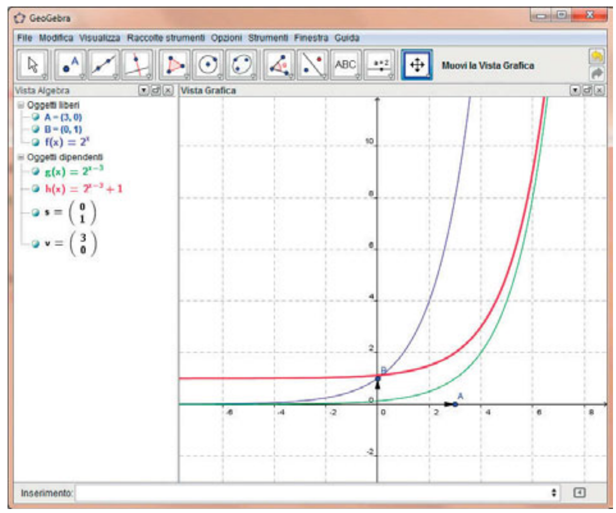
La sintassi del comando di traslazione è la seguente **Trasla** [*oggetto*, *vettore*]

Per definire un vettore si deve usare il comando:

Vettore [**punto**] oppure **Vettore** [**punto_iniziale**, **punto_finale**]

Nel primo caso il vettore ha come componenti le coordinate del punto, nel secondo il vettore è definito dai due punti indicati, ed è orientato dal primo punto verso il secondo.
Nel nostro caso dobbiamo definire due vettori: il primo di origine O che ha il secondo estremo nel punto $A(3, 0)$, il secondo di origine O che ha il secondo estremo nel punto $B(0, 1)$.
Scriviamo quindi attraverso la riga di inserimento:

$A = (3,0)$	per definire i punti le cui coordinate sono le componenti del vettore
$B = (0,1)$	
$v = Vettore\ [A]$	per definire i due vettori
$s = Vettore\ [B]$	



Operiamo adesso con il comando di traslazione

Trasla $[f(x), v]$	si ottiene in questo caso la funzione $g(x) = 2^{x-3}$ (in verde nel grafico)
Trasla $[g(x), s]$	si ottiene la funzione $h(x) = 2^{x-3} + 1$ (in rosso con una linea più marcata)

Altri comandi di trasformazioni che possono essere utili sono i seguenti:

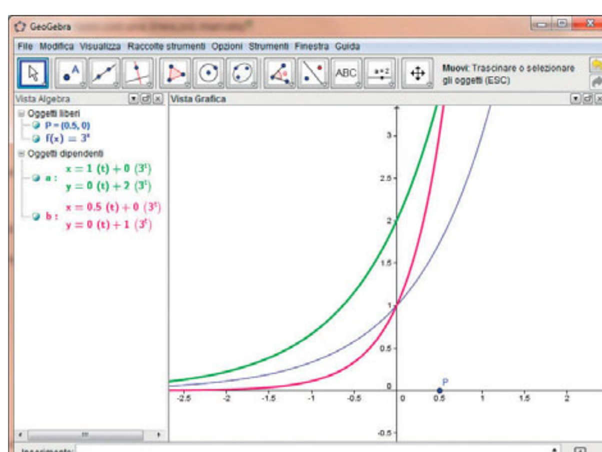
- **Dilata [Oggetto, Retta, Rapporto]**

  All'oggetto viene applicata una dilatazione di rapporto indicato in direzione perpendicolare alla retta specificata come secondo argomento.

- **Dilata [Oggetto, Vettore]**

  All'oggetto viene applicata una dilatazione in direzione parallela al vettore indicato e di fattore uguale al modulo del vettore.

Nell'immagine a lato, alla funzione $f(x) = 3^x$ abbiamo applicato prima una dilatazione di fattore 2 lungo l'asse y ottenendo la curva in verde e poi, sempre alla funzione f, una dilatazione di fattore $\frac{1}{2}$ lungo l'asse x applicando i due comandi precedenti.

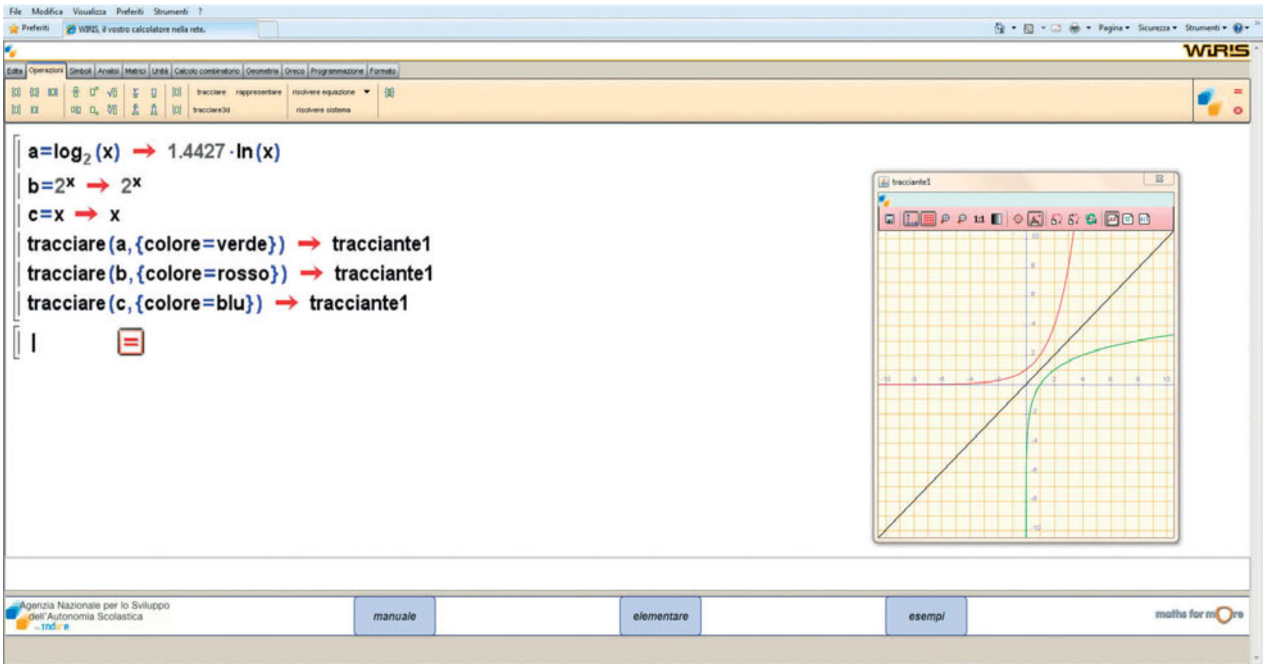


2. La funzione logaritmica con Wiris

In modo del tutto analogo a quello usato per la funzione esponenziale puoi studiare le caratteristiche della funzione logaritmica con GeoGebra; in questa esercitazione vogliamo usare invece Wiris.
Per renderci conto che la funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale, tracciamo in uno stesso grafico le tre funzioni:

$$y = \log_2 x \qquad y = 2^x \qquad y = x$$

Vi è simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ tra le due curve in rosso (la curva esponenziale) e in verde (la curva logaritmica) e questo significa che le due funzioni sono l'una l'inverso dell'altra.



Vediamo adesso le caratteristiche di questa curva; anche con Wiris si può costruire uno strumento simile allo slider di GeoGebra; scrivi le seguenti istruzioni ed osserva che cosa accade:

a := spostamento (0.2..3)

f := log(x, a)

tracciare (a)

tracciare $(f, \{colore = rosso\})$

Nella finestra grafica viene creato un parametro *a* che può assumere tutti i valori reali che appartengono all'intervallo che è stato specificato, nel nostro caso (0.2; 3); muovendo l'indice che corrisponde al valore di *a* viene disegnata la curva logaritmica $y = \log_a x$.

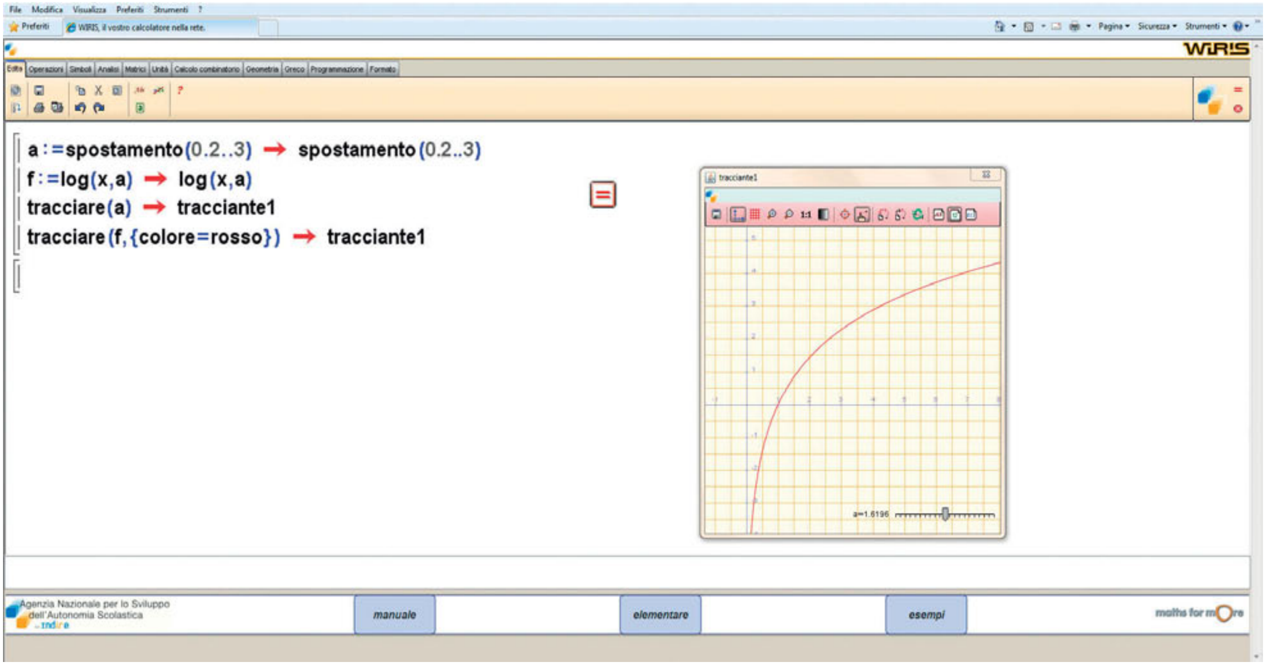
Per creare un indice variabile si usa il seguente comando:

a := spostamento (valore_iniziale..valore_finale)

Anche la funzione la cui equazione è legata al parametro deve essere dichiarata con il simbolo di assegnamento :=

f := <espressione della funzione>

Muovi dunque l'indice del parametro *a* ed osserva che cosa accade alla funzione logaritmica: a partire dal valore iniziale 0.2 si ha una curva decrescente la cui pendenza della curva cambia ad ogni incremento di *a* e diventa sempre più ripida; quando *a* diventa maggiore di 1 cambia anche la forma della curva, diventa crescente e meno ripida al crescere di *a*. In ogni caso tutte le funzioni passano per il punto di coordinate (1, 0).


a:=spostamento(0.2..3) → spostamento(0.2..3)
f:=log(x,a) → log(x,a)
tracciare(a) → tracciante1
tracciare(f,{colore=rosso}) → tracciante1
tracciante1
a=1.6196
manuale
elementare
esempi

