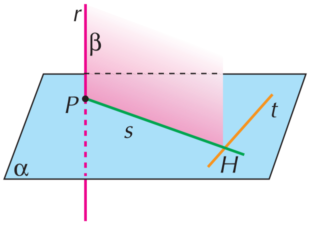
Concetti chiave e regole

Rette e piani

- Due rette nello spazio sono **complanari** se appartengono allo stesso piano, sono **sghembe** se appartengono a piani diversi; sono **parallele** se sono complanari e non si intersecano oppure coincidono.
- Due piani sono **paralleli** se non hanno punti in comune o se sono coincidenti, sono **incidenti** se hanno in comune una sola retta.
- Relativamente a un piano una retta può essere:
  - **appartenente** al piano se tutti i suoi punti appartengono al piano
  - **parallela** al piano se non lo interseca
  - **incidente** se lo interseca in un solo punto P; in particolare è **perpendicolare** al piano se è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per P.

  Si verifica poi che se una retta è perpendicolare a due rette del piano passanti per P, è perpendicolare anche a tutte le altre e quindi al piano.
- Per la relazione di perpendicolarità tra una retta e un piano vale il seguente:

  Teorema delle tre perpendicolari. Sia r una retta perpendicolare a un piano α in un punto P; sia t una retta qualunque di α e sia s la retta perpendicolare condotta da P su t. Allora t è perpendicolare al piano β definito da r e da s.



Diedri e angoloidi

Relativamente ai diedri e agli angoloidi si può dire che:

- due semipiani che hanno l'origine in comune dividono lo spazio in due **angoli diedri** dei quali uno è concavo e l'altro è convesso
- ogni piano che interseca un diedro definisce un angolo che rappresenta la sezione del diedro; se il piano è perpendicolare allo spigolo del diedro si parla di **sezione normale**; la misura di un diedro è la misura della sua sezione normale
- due piani sono perpendicolari se sono incidenti e formano diedri retti
- le semirette che, uscendo da un punto P, intersecano i lati di un poligono appartenente ad un piano che non contiene P definiscono una superficie piramidale, la parte di spazio delimitata da una superficie piramidale si chiama **angoloide**
- un angoloide che ha tre facce si chiama **triedro** ed ha la caratteristica che ciascuna faccia è minore della somma delle altre due e maggiore della loro differenza.

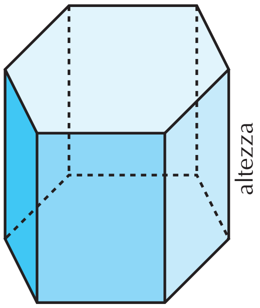
Poliedri

Poliedro è la figura solida delimitata da un numero finito di poligoni (almeno quattro) appartenenti a piani diversi, in modo che abbiano un lato in comune e nessuno di essi tagli il solido.
Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari e se tutti i suoi diedri sono congruenti. I **poliedri regolari** sono cinque:

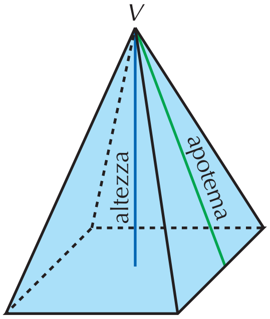
- il *triedro*, l'*ottaedro* e l'*icosaedro* che hanno per facce triangoli equilateri
- il *cubo* che ha per facce dei quadrati
- il *dodecaedro* che ha per facce pentagoni regolari.

Altri poliedri sono:

- il **prisma**, che ha come basi due poligoni paralleli e congruenti e come facce laterali dei parallelogrammi.
  In particolare:
  - un prisma che ha per basi due parallelogrammi si chiama *parallelepipedo*
  - un prisma le cui facce sono perpendicolari ai piani di base è un *prisma retto*.



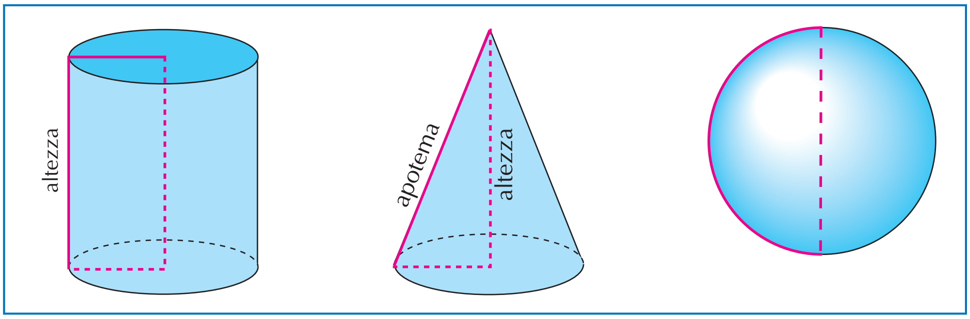
- la **piramide**, che ha come base un poligono e come facce laterali dei triangoli che convergono in un vertice V. In particolare, la piramide si dice:
  - *retta* se la sua base si può circoscrivere ad una circonferenza il cui centro è la proiezione del vertice V sul piano di base
  - *regolare* se è retta e se il poligono di base è un poligono regolare.



Solidi di rotazione

Un solido è di **rotazione** se si ottiene facendo ruotare una figura piana attorno a una retta. I principali solidi di rotazione sono:

- il **cilindro**, generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno alla retta di un suo lato
- il **cono**, generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno alla retta di un suo cateto
- la **sfera**, generata dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



Le superfici dei poliedri

Per calcolare la misura della **superficie di un poliedro** basta sviluppare tale superficie in un piano e calcolare le aree dei poligoni così ottenuti; in questo modo, con lo stesso significato dei simboli usato nel testo (in particolare p è il semiperimetro), si ottengono le seguenti formule:

- prisma: $S_t = 2S_b + 2ph$
- parallelepipedo rettangolo $S_t = 2(a+b)\cdot c + 2ab$
- cubo: $S_t = 6\ell^2$
- piramide retta: $S_t = S_b + pa$
- tronco di piramide retta: $S_t = a(p' + p) + A + A'$

Le superfici dei solidi di rotazione

Le seguenti formule esprimono la misura dell'area delle superfici dei principali solidi di rotazione:

- cilindro: $S_\ell = 2\pi rh$ $S_b = \pi r^2$ $S_t = 2\pi r(h+r)$
- cono: $S_\ell = \pi ra$ $S_b = \pi r^2$ $S_t = \pi r(a+r)$
- sfera: $S_t = 4\pi r^2$
- tronco di cono: $S_t = \pi a(r+R) + \pi r^2 + \pi R^2$

Volumi ed equivalenza nello spazio

Il **volume** di un solido è la caratteristica comune a tutti i solidi che hanno la medesima estensione spaziale; l'unità di misura dei volumi è il cubo di lato unitario. Si dimostra che:

- i volumi di parallelepipedi rettangoli che hanno basi congruenti sono proporzionali alle rispettive altezze
- il volume di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c è dato dalla formula $V = abc$.

Due solidi si dicono equivalenti se hanno la stessa estensione. Il **principio di Cavalieri** enuncia un criterio per stabilire se due solidi sono equivalenti:

– se due solidi si possono disporre in modo che risultino equivalenti tutte le loro sezioni con piani paralleli al piano della base, allora essi sono equivalenti.

In base a questo principio si dimostra che:

- due prismi sono equivalenti se hanno basi equivalenti ed altezze congruenti
- due piramidi sono equivalenti se hanno basi equivalenti ed altezze congruenti
- una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma che ha la base equivalente a quella della piramide e la stessa altezza
- un cilindro è equivalente a un prisma che ha la base equivalente a quella del cilindro e la stessa altezza
- un cono è equivalente a una piramide che ha la base equivalente a quella del cono e la stessa altezza
- una sfera è equivalente all'anticlessidra.

Misure dei volumi

In base ai teoremi di equivalenza si ricavano le seguenti formule per il calcolo dei volumi:

- prisma: $V = S_b h$
- piramide: $V = \frac{1}{3} S_b h$
- tronco di piramide: $V = \frac{1}{3} h \left(B + b + \sqrt{bB}\right)$
- cilindro: $V = \pi r^2 h$
- cono: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
- sfera: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
- tronco di cono: $V = \frac{1}{3} \pi h \, (r^2 + R^2 + rR)$