Concetti chiave e regole

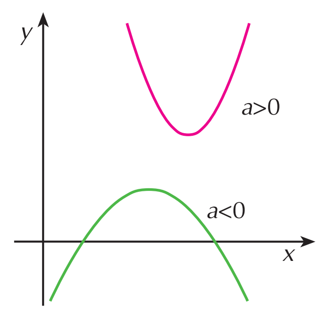
Le trasformazioni nel piano cartesiano

Trasformazione	**Equazioni della trasformazione**	**Sostituzioni per trovare la curva trasformata**
Traslazione di vettore $\vec{v} = (a, b)$	$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow x - a \\ y \rightarrow y - b \end{cases}$
Simmetria rispetto all'asse x	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$
Simmetria rispetto all'asse y	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow y \end{cases}$
Simmetria rispetto alla terra $y = x$	$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{cases}$

La parabola e la sua equazione

La parabola è il luogo dei punti che hanno uguale distanza da un punto fisso F, detto fuoco, e da una retta fissa d, detta direttrice.

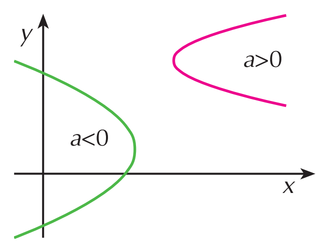
In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, l'equazione di una parabola ha forma diversa a seconda che l'asse di simmetria sia parallelo all'asse x o all'asse y.



- Se l'asse di simmetria è parallelo all'asse y la parabola ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

e la concavità è rivolta: verso l'alto se $a > 0$
verso il basso se $a < 0$



- Se l'asse di simmetria è parallelo all'asse x la parabola ha equazione

$$x = ay^2 + by + c$$

e la concavità è rivolta: verso destra se $a > 0$
verso sinistra se $a < 0$

Gli elementi caratteristici

Se si conosce l'equazione di una parabola, posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si possono trovare il vertice, il fuoco, l'equazione dell'asse e della direttrice con queste formule:

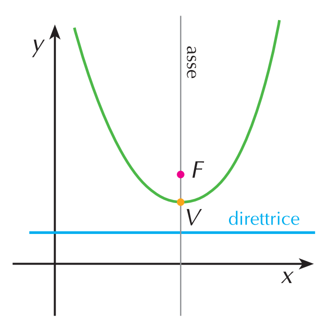
- per la parabola $y = ax^2 + bx + c$:

vertice $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

fuoco $F\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$

asse $x = -\dfrac{b}{2a}$

direttrice $y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$

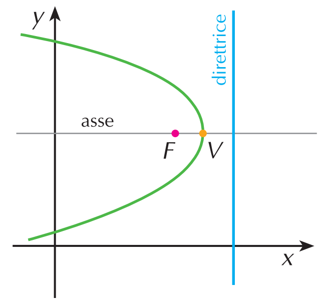


- per la parabola $x = ay^2 + by + c$: vertice $V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

  fuoco $F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

  asse $y = -\frac{b}{2a}$

  direttrice $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$



Per tracciare il grafico di una parabola quando è nota la sua equazione è indispensabile trovare il vertice e le coordinate di qualche punto (non è necessario, anche se può essere utile, trovare le coordinate del fuoco e l'equazione dell'asse o della direttrice).

Le condizioni per determinare l'equazione di una parabola

Per trovare l'equazione di una parabola sono necessarie e sufficienti tre informazioni indipendenti; in particolare:

- se è noto il vertice (x_0, y_0) è comodo usare la formula

  $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ se la parabola ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y

  $x - x_0 = a(y - y_0)^2$ se la parabola ha l'asse di simmetria parallelo all'asse x

  Serve poi un'altra informazione per determinare il parametro a.
- se sono note le coordinate di tre punti, basta sostituire tali coordinate nell'equazione generale della parabola e risolvere il sistema ottenuto.

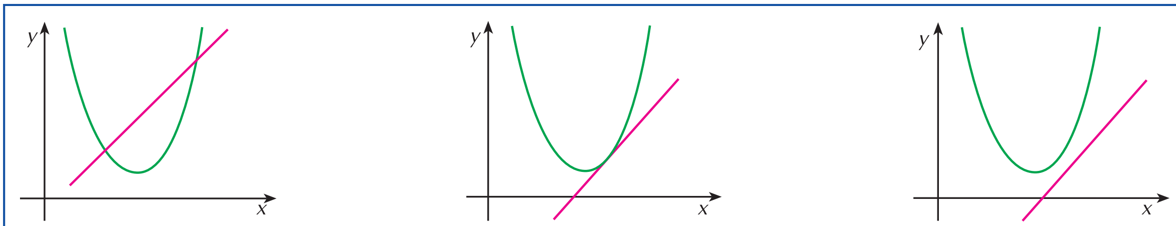
Rette e parabole

Per determinare la **posizione di una retta rispetto a una parabola** si deve:

- impostare il sistema retta-parabola
- determinare l'equazione risolvente di secondo grado nella variabile x (oppure y) a seconda del tipo di parabola
- calcolare il discriminante Δ di questa equazione: se $\Delta > 0$ la retta è secante la parabola

  se $\Delta = 0$ la retta è tangente alla parabola

  se $\Delta < 0$ la retta non interseca la parabola



a. $\Delta > 0$ la retta è secante ***b.*** $\Delta = 0$ la retta è tangente ***c.*** $\Delta < 0$ la retta è esterna

Le rette tangenti

Per trovare l'equazione della **retta tangente** a una parabola si deve calcolare il discriminante Δ dell'equazione risolvente il sistema retta-parabola e imporre che sia $\Delta = 0$.
In particolare, se la retta tangente deve passare per un punto $P(x_0, y_0)$ che appartiene alla parabola, oltre al metodo illustrato è possibile seguire anche queste procedure:

- scrivere l'equazione della retta $y - y_0 = m(x - x_0)$ dove:
  - $m = 2ax_0 + b$ se la parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$
  - $m = \frac{1}{2ay_0 + b}$ se la parabola è del tipo $x = ay^2 + by + c$
- applicare le **formule di sdoppiamento** ponendo nell'equazione della parabola, a seconda della forma:

  x_0x al posto di x^2 y_0y al posto di y^2 $\frac{1}{2}(x_0 + x)$ al posto di x $\frac{1}{2}(y_0 + y)$ al posto di y