Rette, piani e figure nello spazio

OBIETTIVI

- individuare la posizione reciproca di rette e piani nello spazio
- conoscere le caratteristiche dei poliedri e dei poliedri regolari
- conoscere le caratteristiche dei solidi di rotazione con particolare riferimento a cilindro, cono e sfera
- calcolare misure di superfici di poliedri
- calcolare misure di superfici di particolari solidi di rotazione
- calcolare volumi di poliedri
- calcolare volumi di particolari solidi di rotazione

1 RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 21

1.1 I primi elementi

In uno dei primi capitoli abbiamo definito lo spazio come l'insieme di tutti i punti e abbiamo detto che è caratterizzato dal seguente assioma:

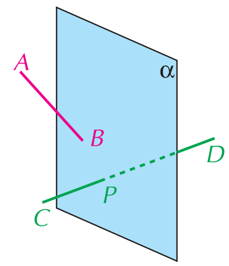
A5. Lo spazio contiene infiniti punti, infinite rette, infiniti piani.

Un'altra caratteristica dello spazio, analoga a quella che abbiamo introdotto per il piano, è data dal seguente assioma

A17. (di partizione dello spazio) Ogni piano divide lo spazio in due regioni, dette semispazi, di cui il piano stesso si dice origine o frontiera, tali che (***figura 1***):

- il segmento che ha per estremi due punti A e B dello stesso semispazio non interseca il piano
- il segmento che ha per estremi due punti C e D appartenenti a semi-spazi diversi interseca il piano in un punto.

Figura 1

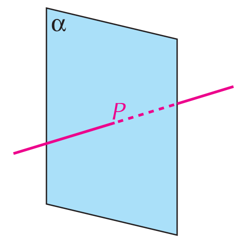


$AB \cap \alpha = \varnothing \qquad CD \cap \alpha = P$

Da questo assioma discendono immediatamente due importanti considerazioni:

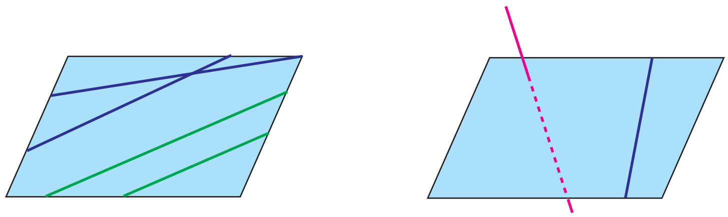
- un piano e un semispazio sono figure convesse;
- una retta avente in comune con un piano α un solo punto P è divisa da P in due semirette che appartengono a semispazi opposti rispetto ad α (***figura 2***).

Figura 2



Abbiamo detto che lo spazio contiene infiniti piani ed infinite rette; cerchiamo quindi di scoprire come possono trovarsi in posizioni reciproche cominciando dalla **posizione reciproca di due rette.** Diciamo **complanari** due rette che appartengono allo stesso piano, diciamo **sghembe** due rette per le quali non esiste un piano a cui entrambe appartengono (***figura 3*** di pagina seguente).

Figura 3



a. rette complanari ***b.*** rette sghembe

Ricordiamo poi che si dice **fascio proprio** l'insieme di tutte le rette complanari che passano per uno stesso punto detto centro del fascio e **fascio improprio** l'insieme di tutte le rette (complanari) che sono parallele fra loro.
Chiameremo poi **stella di centro *P*** l'insieme delle rette dello spazio che passano per P il quale è detto **sostegno** della stella. L'intersezione di una stella con un piano passante per il suo sostegno è un fascio di rette proprio; possiamo inoltre dire che due rette distinte di una stella, dato che appartengono ad uno e un solo piano, individuano uno e un solo fascio proprio.

Un piano ed una retta che non gli appartiene possono avere un solo punto in comune (se ne hanno due la retta appartiene al piano), ed in questo caso si dicono **incidenti**, nessun punto in comune, ed in questo caso si dicono **paralleli**.

Consideriamo ora due piani α e β e cominciamo con l'osservare che se hanno tre punti in comune, in virtù dell'assioma **A2** (tre punti non allineati appartengono ad uno e un solo piano), allora li hanno tutti; è inutile quindi considerare il caso in cui i punti in comune sono più di tre. Possiamo allora dire che:

- se due piani hanno in comune tre punti non allineati, allora sono lo stesso piano;
- se due piani hanno in comune due punti A e B (oppure tre allineati), allora hanno in comune anche tutti i punti della retta AB (***figura 4***);
- se due piani hanno in comune un punto, allora hanno in comune i punti di una retta che passa per quel punto (***figura 5***).

Figura 4

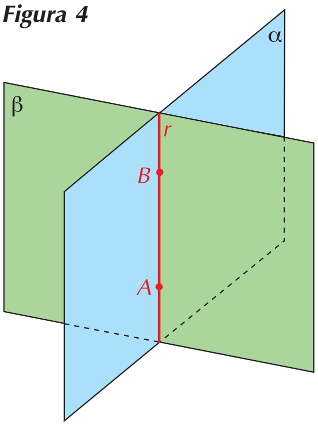
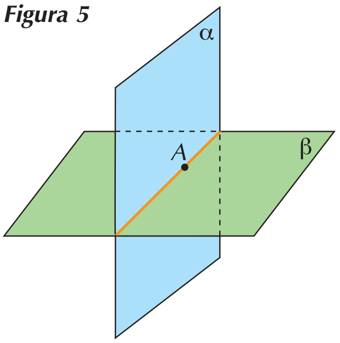
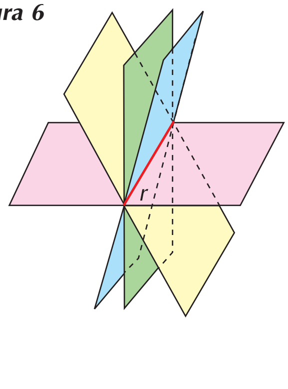


Figura 5



In conseguenza di quanto affermato possiamo dire che due piani o sono **coincidenti**, o si intersecano lungo una retta ed in questo caso si dicono **incidenti**, oppure non hanno punti in comune ed in questo caso si dicono **paralleli**; non è possibile che due piani abbiano un solo punto in comune.
Da quanto detto segue poi che per una retta r passano infiniti piani; l'insieme di tali piani si dice **fascio proprio di piani** e la retta r costituisce l'**asse** del fascio (***figura 6***). L'insieme dei piani che passano per uno stesso punto si dice invece **stella di piani**.

Figura 6

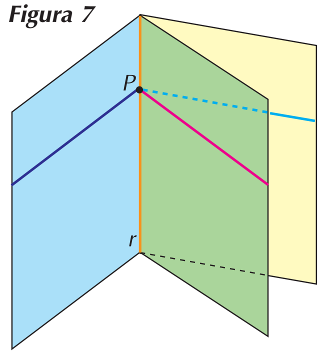


1.2 Perpendicolarità fra rette e piani

Nel piano la perpendicolare a una retta data per un punto ad essa esterno o per un punto che le appartiene è sempre unica. Anche nello spazio la perpendicolare ad una retta data per un punto che non le appartiene è unica; basta pensare infatti che la retta ed il punto definiscono un piano. Le cose vanno diversamente se il punto appartiene alla retta.

Consideriamo dunque una retta r ed un suo punto P; poiché per r passano infiniti piani, ognuno di questi piani conterrà una retta che passa per P ed è perpendicolare a r (***figura 7***). Nello spazio, quindi, le perpendicolari ad una retta data per un suo punto sono in numero infinito e si può dimostrare che esse appartengono tutte ad uno stesso piano; vale infatti il seguente teorema.

Figura 7



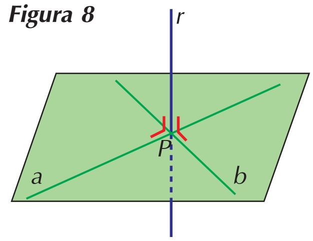
Teorema. Se una retta r è perpendicolare in un suo punto P ad altre due rette a e b, allora è perpendicolare a tutte e sole le rette del fascio di centro P del piano definito da a e b (***figura 8***).

Questo teorema ci consente di dare la definizione di perpendicolarità fra retta e piano.

DEFINIZIONE DI RETTA PERPENDICOLARE A UN PIANO

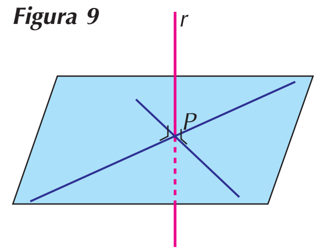
Una retta r incidente ad un piano α in un punto P è **perpendicolare** ad α se è perpendicolare a tutte le rette di α che passano per P; il punto P si dice **piede** della perpendicolare.
Le rette incidenti ad α che non sono ad esso perpendicolari si dicono **oblique**.

Figura 8



Osserviamo che il teorema costituisce un utile **criterio di perpendicolarità** fra una retta e un piano: basta infatti verificare che tale retta sia perpendicolare a due sole rette del piano che passano per P per poter concludere che è perpendicolare al piano stesso (***figura 9***).

Figura 9



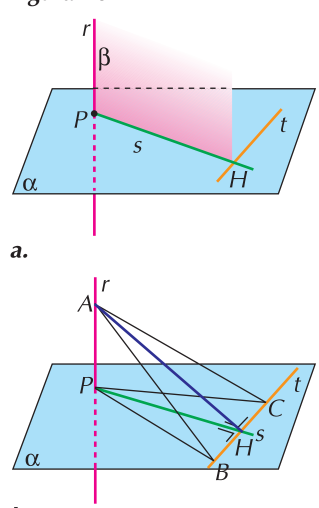
Enunciamo adesso un secondo importante teorema.

Teorema (delle tre perpendicolari). Se una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto P e da questo si conduce una retta s perpendicolare ad una retta t di α, questa è perpendicolare al piano β individuato da r e da s.

Dimostrazione.

Costruiamo la figura: disegniamo un piano α ed una retta r ad esso perpendicolare in un punto P; disegniamo una retta t su α che non passa per P; tracciamo la retta s uscente da P perpendicolare a t e sia H il loro punto di intersezione; costruiamo il piano β individuato dalle rette s e r (***figura 10a***). Vogliamo dimostrare che t è perpendicolare a β.
Consideriamo i punti B e C di t situati da parti opposte rispetto a H e tali che $BH \cong HC$ ed un punto qualsiasi A su r; tracciamo poi i segmenti PB e PC e anche AB e AC (***figura 10b***). I triangoli rettangoli PBH e PCH, avendo i cateti congruenti, sono congruenti e quindi possiamo dire che $PB \cong PC$. Anche i triangoli rettangoli APB e APC sono quindi congruenti (hanno anch'essi i cateti congruenti) e quindi $AB \cong AC$. Il triangolo ABC è perciò isoscele sulla base BC e quindi AH, essendo mediana, è anche altezza; questo significa che AH è perpendicolare alla retta t.
In definitiva, t è perpendicolare ad AH e PH, AH e PH definiscono il piano β, quindi t è perpendicolare a β. ◀

Figura 10



a.

b.

Si dimostra poi che:

il piano perpendicolare a una retta passante per un suo punto P è unico.

Viceversa:

per un punto P si può condurre una e una sola retta perpendicolare a un piano α.

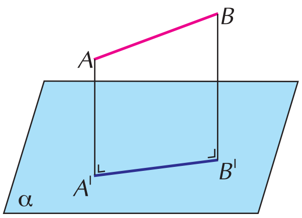
Il punto H di intersezione fra la retta e il piano rappresenta la **proiezione ortogonale** di P su α.
La proiezione ortogonale di un segmento AB si ottiene poi considerando il segmento $A'B'$ che ha per estremi le proiezioni ortogonali di A e di B su α (***figura 11a***).
Analogamente la proiezione ortogonale di una retta r su un piano α è la retta s che passa per i punti proiezione di due qualsiasi punti di r (***figura 11b***).
La proiezione ortogonale di una retta r incidente in A ad un piano α su α stesso è una retta s di α che passa per A. Si può dimostrare che l'angolo $\widehat{rs}$ (necessariamente acuto se la retta non è perpendicolare al piano) è il più piccolo fra gli angoli formati da r con una qualsiasi altra retta di α (***figura 12***). È allora naturale chiamare **angolo fra una retta ed un piano** l'angolo formato dalla retta e dalla sua proiezione ortogonale sul piano.
Inoltre, se da un punto P esterno ad un piano α si conducono il segmento di perpendicolare PH ed alcuni segmenti obliqui PA, PB, PC con $A,B,C \in \alpha$ si ha che (***figura 13***):

a. il segmento di perpendicolare è minore di ogni altro segmento obliquo:
$$PH < PA \ \wedge \ PH < PB \ \wedge \ PH < PC$$

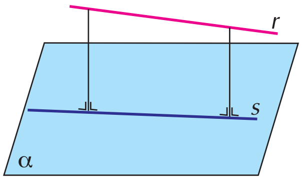
b. due segmenti obliqui aventi proiezioni congruenti sono fra loro congruenti e viceversa:
$$HA \cong HB \ \Leftrightarrow \ PA \cong PB$$

c. se due segmenti obliqui hanno proiezioni disuguali, allora anche i due segmenti obliqui sono disuguali nello stesso senso e viceversa:
$$HC > HA \ \Leftrightarrow \ PC > PA$$

Figura 11



a.



b.

Figura 12

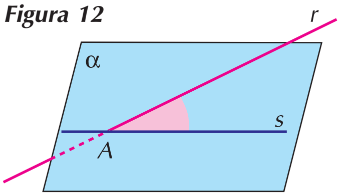
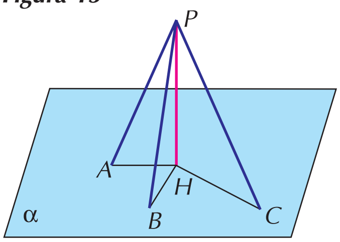


Figura 13



1.3 Il parallelismo nello spazio

Mentre nel piano si può parlare soltanto di rette parallele, nello spazio dobbiamo considerare tre relazioni di parallelismo fra loro distinte:

- il **parallelismo fra rette**,
- il **parallelismo fra una retta ed un piano**,
- il **parallelismo fra piani**.

Anche se queste relazioni sono intuitivamente semplici, cercheremo di dare delle definizioni rigorose, enunciando poi le proprietà del parallelismo.

Il parallelismo fra rette

La definizione di rette parallele nello spazio non può essere la stessa di quella data per due rette nel piano; sappiamo infatti che anche due rette sghembe non hanno punti di intersezione. Diremo quindi che:

DEFINIZIONE DI PARALLELISMO FRA RETTE NELLO SPAZIO

due rette nello spazio si dicono parallele se sono coincidenti oppure se sono complanari e non hanno punti di intersezione.

Ricordiamo poi l'assioma di unicità della parallela:

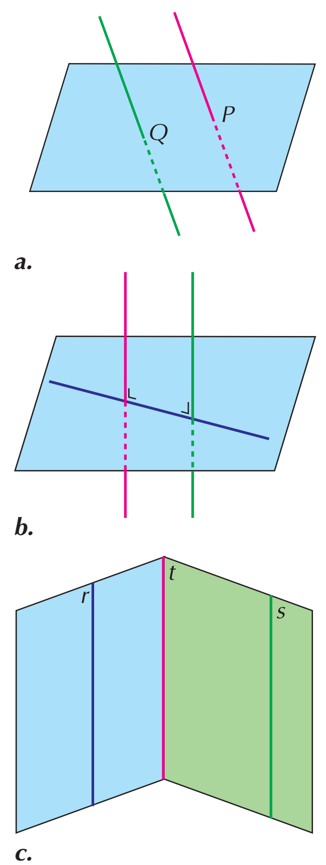
A13. data una retta r ed un punto P fuori di essa, esiste ed è unica la parallela per P alla retta r.

Vediamo quali sono le proprietà delle rette parallele nello spazio.

- Se due rette sono parallele, ogni piano che incontra una incontra anche l'altra (***figura 14a***).
- Due rette che sono perpendicolari ad uno stesso piano sono fra loro parallele e, viceversa, se due rette sono parallele, un piano che è perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra (***figura 14b***).
- Date due rette parallele r e s e considerati un piano passante per r ed uno passante per s che si intersecano lungo una terza retta t, si ha che t è parallela sia a r che a s (***figura 14c***).
- La relazione di parallelismo fra rette è
  - **riflessiva**: ogni retta è parallela a se stessa,
  - **simmetrica**: se una retta r è parallela ad una retta s, anche s è parallela a r,
  - **transitiva**: se r è parallela a t e t è parallela a s, anche r è parallela a s; attenzione però: r e t appartengono allo stesso piano, s e t appartengono allo stesso piano, ma non è detto che tutte e tre le rette siano sullo stesso piano (rivedi a questo proposito la ***figura 14c***).

  Anche nello spazio la relazione di parallelismo tra rette definisce la loro **direzione**.

Figura 14



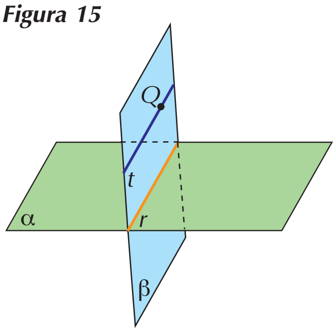
Il parallelismo fra rette e piani

Consideriamo un piano α, una retta r che giace sul piano ed un punto Q che non appartiene ad α.
Sappiamo che Q e la retta r individuano un piano β la cui intersezione con α è r (***figura 15***); sappiamo inoltre che, sul piano β, esiste ed è unica la parallela per Q alla retta r. Tale retta non ha quindi punti in comune con il piano α e si dice che è parallela ad α.
Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE DI RETTA PARALLELA A UN PIANO

Una retta si dice parallela ad un piano se non ha alcun punto in comune con esso oppure se appartiene interamente al piano.

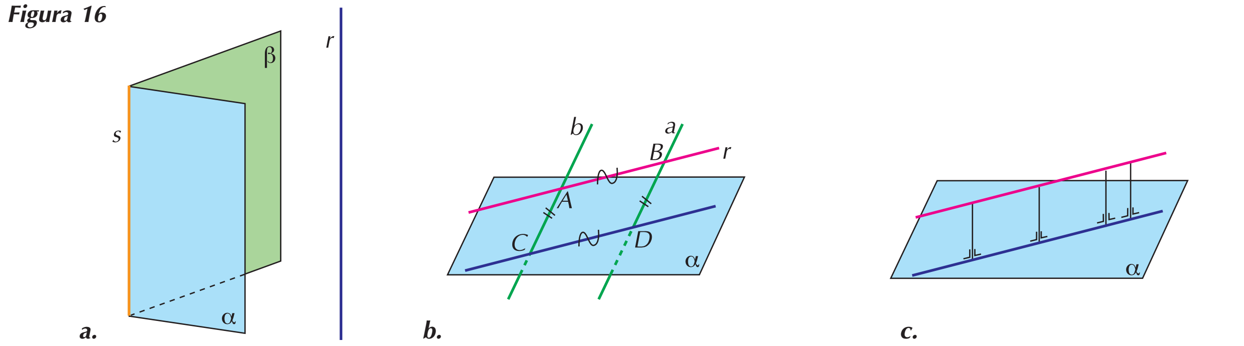
Figura 15



La relazione di parallelismo fra rette e piani gode delle seguenti proprietà:

- se due rette sono parallele, ogni piano parallelo all'una è parallelo anche all'altra;
- se una retta r è parallela a due piani che si intersecano lungo una retta s, allora r è parallela a s (***figura 16a*** di pagina seguente);
- se una retta r è parallela ad un piano α e se a e b sono due rette parallele che intersecano r nei punti A e B ed α nei punti C e D, allora $AC \cong BD$ e $AB \cong CD$ (***figura 16b***);
- se una retta e un piano sono paralleli allora tutti i punti della retta hanno la stessa distanza dal piano (***figura 16c***).

Figura 16



Quest'ultima proprietà ci consente di enunciare la seguente definizione.

Si dice **distanza di una retta da un piano ad essa parallelo** la distanza di uno qualsiasi dei suoi punti dal piano.

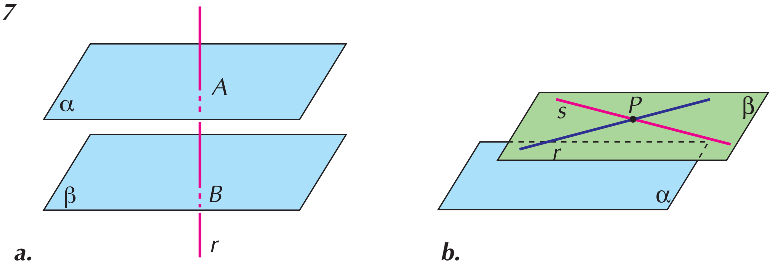
DEFINIZIONE DI DISTANZA RETTA - PIANO

Il parallelismo fra piani

Abbiamo già detto che due piani sono paralleli se non hanno punti di intersezione o se coincidono. L'esistenza di piani paralleli è garantita dalle seguenti proprietà:

- due piani perpendicolari a una stessa retta sono fra loro paralleli (***figura 17a***);
- se per un punto P non appartenente a un piano α si conducono due rette ad esso parallele, il piano β da esse individuato è parallelo ad α (***figura 17b***).

Figura 17



Queste due proprietà ci danno quindi un modo per costruire il piano passante per un punto P che sia parallelo ad un altro piano α assegnato.
Si dimostra inoltre che:

Dati un piano α e un punto P fuori di esso esiste ed è unico il piano ad esso parallelo passante per P.

Enunciamo le proprietà dei piani paralleli.

PROPRIETÀ DEL PARALLELISMO TRA PIANI

- La relazione di parallelismo fra piani è riflessiva, simmetrica e transitiva. Di tutti i piani che sono tra loro paralleli si dice che hanno la stessa **giacitura** (la giacitura dei piani è l'analogo della direzione delle rette parallele).
  Si dice poi **fascio di piani paralleli** o **fascio improprio** di piani l'insieme di

tutti i piani aventi la stessa giacitura e si dice **strato** la parte di spazio compresa fra due piani paralleli.

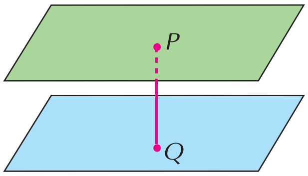
- Se due piani sono paralleli, ogni retta che incontra uno incontra anche l'altro.
- Se due piani sono paralleli, ogni retta perpendicolare all'uno è perpendicolare anche all'altro.

Quest'ultima proprietà è l'inversa della prima fra quelle enunciate e ci consente di dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE DI DISTANZA TRA PIANI PARALLELI

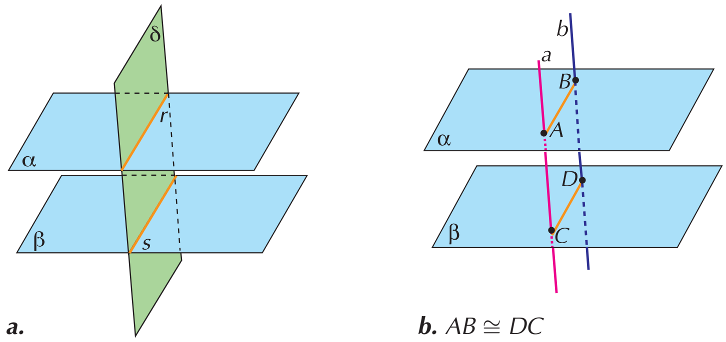
Si dice **distanza di due piani paralleli** il segmento da essi individuato su una qualsiasi retta perpendicolare ai due piani (***figura 18***).

Figura 18



- Se un piano incontra due piani paralleli, le rette intersezione sono fra loro parallele (***figura 19a***).
- Se due piani sono paralleli, ogni retta parallela al primo è parallela anche al secondo.
- Se due piani paralleli intersecano due rette parallele, i segmenti che si vengono a determinare sono congruenti (***figura 19b***).

Figura 19



a. **b.** $AB \cong DC$

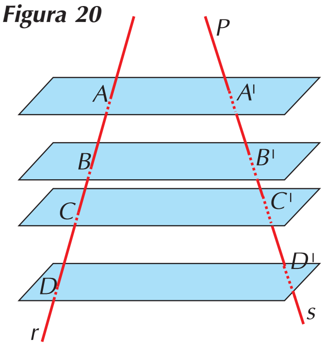
Vale inoltre il seguente teorema.

Teorema (di Talete nello spazio). Un fascio di piani paralleli individua su due rette trasversali insiemi di segmenti direttamente proporzionali.

Vale cioè la seguente catena di uguaglianze (***figura 20***):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \text{.........}$$

Figura 20



2 DIEDRI, PERPENDICOLARITÀ NELLO SPAZIO E ANGOLOIDI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 23

Angoli diedri

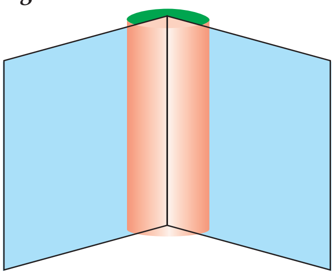
Consideriamo due semipiani aventi la retta origine in comune; lo spazio viene in questo modo diviso in due regioni opposte (***figura 21*** di pagina seguente).

Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE DI DIEDRO

Si dice **angolo diedro** o più semplicemente **diedro** ciascuna delle due parti in cui due semipiani aventi la stessa origine dividono lo spazio, inclusi i semipiani stessi.
La retta origine dei due semipiani si dice **spigolo** del diedro, i due semipiani si dicono **facce**.

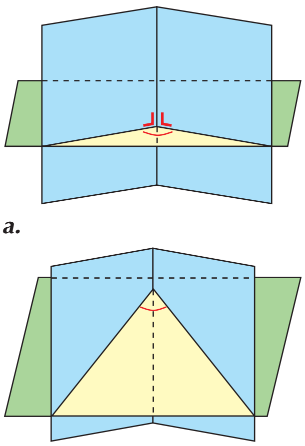
Figura 21



Diciamo poi che:

- un **diedro piatto** è un diedro le cui facce sono semipiani opposti; due diedri la cui somma è un diedro piatto si dicono **supplementari**;
- un **diedro giro** è un diedro in cui le facce sono semipiani coincidenti e che contiene tutti i punti dello spazio; un diedro che, avendo le facce coincidenti, non contiene altri punti dello spazio oltre a quelli delle facce si dice **diedro nullo**. Due diedri la cui somma è un diedro giro si dicono **esplementari**;
- un diedro si dice **convesso** se i prolungamenti delle sue facce non gli appartengono, si dice **concavo** in caso contrario; un diedro che è minore di un diedro piatto è convesso, un diedro che è maggiore di un diedro piatto è concavo; nel seguito, dove non specificato, sarà sottinteso che ci riferiamo a diedri convessi;
- due diedri si dicono **consecutivi** se hanno in comune una faccia e lo spigolo e se le altre due facce si trovano da parti opposte rispetto a quella comune;
- due diedri si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e le facce non comuni sono una il prolungamento dell'altra;
- si dice **semipiano bisettore** il semipiano che, uscendo dallo spigolo del diedro, lo divide in due diedri congruenti;
- ciascuna delle due parti in cui il semipiano bisettore divide un diedro piatto si dice **diedro retto**; due diedri la cui somma è un diedro retto si dicono **complementari**;
- due piani che si intersecano definiscono quattro angoli diedri; i diedri le cui facce sono una il prolungamento dell'altra si dicono **opposti allo spigolo**. Si verifica che diedri opposti allo spigolo sono congruenti.

Figura 22

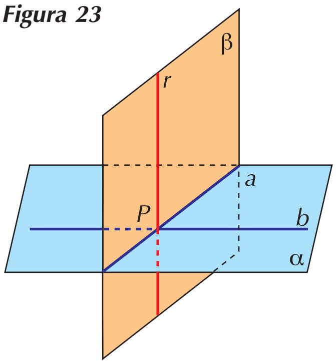


a. **b.**

Diamo ora la seguente definizione.

Si dice **sezione** di un diedro l'intersezione di quel diedro con un piano incidente al suo spigolo. Se il piano è perpendicolare allo spigolo la sezione si dice **normale** (***figura 22a***), se il piano non è perpendicolare allo spigolo la sezione si dice **obliqua** (***figura 22b***).

Figura 23



Si può dimostrare che:

- tutte le sezioni normali di un diedro sono **congruenti**.

Appare dunque naturale definire la misura di un diedro tramite quella delle sue sezioni normali.

Gli angoli diedri ci consentono di definire due piani perpendicolari (***figura 23***).

DEFINIZIONE DI PIANI PERPENDICOLARI

Due piani si dicono **perpendicolari** se, incontrandosi, formano quattro diedri congruenti (e quindi retti).

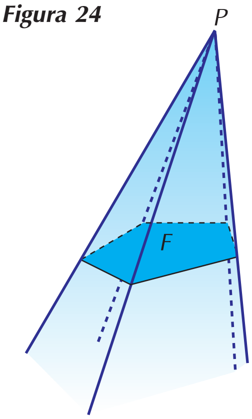
Gli angoloidi

Consideriamo un poligono F ed un punto P che non appartiene al piano di F; immaginiamo ora di tracciare tutte le semirette che, uscendo da P, intersecano i lati del poligono. Esse descrivono una superficie, che si dice **superficie piramidale**, che divide lo spazio in due regioni distinte (***figura 24***).

DEFINIZIONE DI ANGOLOIDE

Si dice **angoloide** la parte di spazio delimitata dalla superficie piramidale che contiene il poligono F.

Figura 24



Il punto P si dice **vertice**, le semirette che passano per i vertici del poligono si dicono **spigoli** e gli angoli formati da due spigoli consecutivi si dicono **facce** dell'angoloide.
Se le facce di un angoloide sono angoli tutti congruenti fra loro, l'angoloide si dice **regolare.** Diremo poi che un angoloide è **convesso** o **concavo** a seconda che il poligono F sia convesso o concavo.
Un angoloide prende nomi diversi a seconda del numero di facce che possiede: se ha tre facce parleremo di **triedro**, se ha 4 facce di **tetraedro**, se ha 5 facce di **pentaedro** e così via.

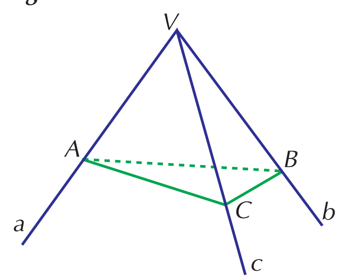
I triedri godono di un'importante proprietà che ci limitiamo ad enunciare:

- in ogni triedro ciascuna faccia è minore della somma delle altre due e maggiore della loro differenza (***figura 25***).

In un triedro valgono cioè le relazioni:

- $\widehat{ab} < \widehat{ac} + \widehat{bc}$ $\qquad \widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}$ $\qquad \widehat{bc} < \widehat{ac} + \widehat{ab}$
- $\widehat{ac} > \widehat{ab} - \widehat{bc}$ $\qquad \widehat{bc} > \widehat{ab} - \widehat{ac}$ $\qquad \widehat{ab} > \widehat{ac} - \widehat{bc}$

Figura 25



La prima parte di questa proprietà dei triedri può essere estesa ad ogni angoloide; si ha cioè che:

- in ogni angoloide ciascuna faccia è minore della somma di tutte le altre.

Inoltre si può dimostrare che:

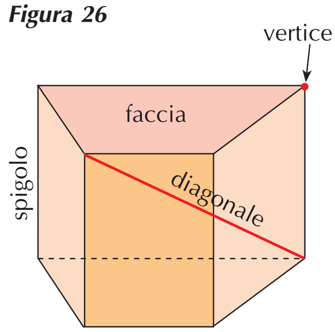
- la somma delle facce di un angoloide è sempre minore di quattro angoli retti.

3 POLIEDRI E SOLIDI DI ROTAZIONE

3.1 I poliedri

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 23

Figura 26



Si dice **superficie poliedrica** la figura che si ottiene dall'unione di n poligoni (con $n \geq 4$), appartenenti ciascuno a piani diversi, tali che ogni lato sia l'intersezione di due di essi.

DEFINIZIONE DI POLIEDRO

Si dice **poliedro** la parte di spazio delimitata da una superficie poliedrica (***figura 26***).

I lati ed i vertici dei poligoni si dicono **spigoli** e **vertici** del poliedro, i poligoni

stessi si dicono **facce**; i segmenti aventi per estremi due vertici non appartenenti alla medesima faccia si dicono **diagonali**.
I vertici di un poliedro sono anche i vertici di altrettanti angoloidi, un poliedro può quindi essere considerato come l'intersezione di tali angoloidi che, per questo, si dicono **angoloidi del poliedro;** se gli angoloidi sono tutti convessi anche il poliedro lo è. I diedri di questi angoloidi sono i **diedri del poliedro**.
Un poliedro prende il nome dal numero delle sue facce: se ha quattro facce si dice **tetraedro**, se ne ha cinque si dice **pentaedro**, se ne ha sei **esaedro** e così via.

Fra il numero f delle facce, il numero v dei vertici ed il numero s degli spigoli di un poliedro esiste una relazione che prende il nome di **relazione di Eulero**, anche se la sua scoperta si deve a Cartesio

$$\boxed{f + v = s + 2}$$

Ad esempio, un pentaedro ha 6 vertici, 5 facce, 9 spigoli ed è $6 + 5 = 9 + 2$.

3.2 Poliedri regolari

Un poliedro si dice **regolare** se le sue facce sono poligoni regolari congruenti ed i suoi angoloidi sono angoloidi congruenti.

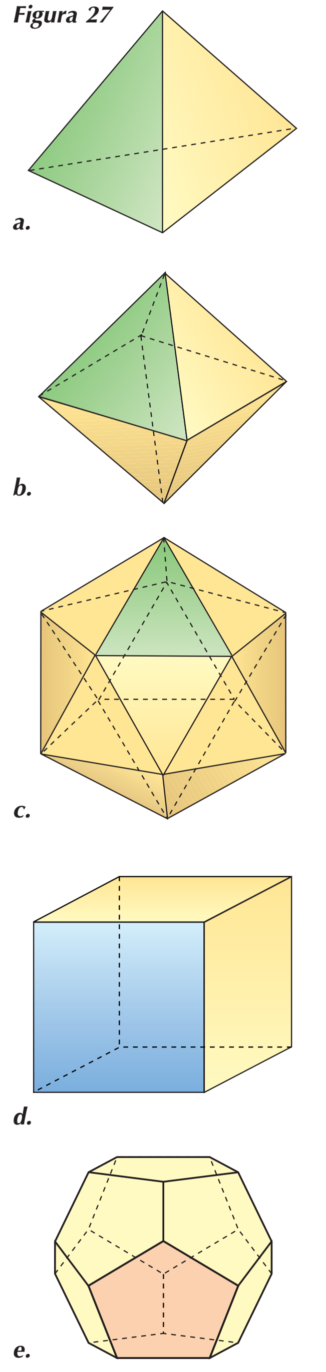
Mentre nel piano si possono costruire poligoni regolari con un qualsivoglia numero di lati, nello spazio i poliedri regolari sono solo cinque. Vediamo perché. Ricordiamo che la somma delle facce di un angoloide è sempre minore di un angolo giro ed inoltre nel vertice di un poliedro devono concorrere almeno tre facce. Osserviamo allora che, in virtù di queste considerazioni, potremo avere poliedri regolari le cui facce sono triangoli equilateri (infatti $60° \cdot 3 = 180° < 360°$), quadrati ($90° \cdot 3 = 270° < 360°$), pentagoni ($108° \cdot 3 = 324° < 360°$), ma non potremo avere poliedri regolari con facce esagonali ($120° \cdot 3 = 360°$ che non è minore di un angolo giro) e più in generale con un numero di lati maggiore di cinque. I poliedri regolari sono dunque i seguenti.

- Il **tetraedro** che si ottiene facendo concorrere in un vertice tre triangoli equilateri; esso ha 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli (***figura 27a***).
- L'**ottaedro** che si ottiene facendo concorrere in un vertice quattro triangoli equilateri ($60° \cdot 4 = 240° < 360°$); esso ha 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli (***figura 27b***).
- L'**icosaedro** che si ottiene facendo concorrere in un vertice cinque triangoli equilateri ($60° \cdot 5 = 300° < 360°$); esso ha 20 facce, 12 vertici e 30 spigoli (***figura 27c***).
- L'**esaedro** o **cubo** che si ottiene facendo concorrere in un vertice tre quadrati ($90° \cdot 3 = 270° < 360°$); esso ha 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli (***figura 27d***).
- Il **dodecaedro** che si ottiene facendo concorrere in un vertice tre pentagoni regolari ($108° \cdot 3 = 324° < 360°$); esso ha 12 facce, 20 vertici e 30 spigoli (***figura 27e***).

Non è possibile costruire poliedri facendo concorrere in un vertice più di cinque triangoli o più di tre quadrati o pentagoni.

I cinque poliedri regolari sono anche detti **solidi platonici** a causa del significato simbolico ad essi attribuito dal filosofo greco Platone.

Figura 27



Da ultimo accenniamo all'esistenza di numerosi poliedri le cui facce sono poligoni regolari anche se non tutti dello stesso tipo; questi poliedri sono detti **semiregolari** o **archimedei**. Un esempio di uso comune di poliedro semiregolare è il pallone da calcio in cui si alternano pentagoni ed esagoni regolari (***figura 28***).

Figura 28

3.3 Altri poliedri

I prismi

Consideriamo un poligono F e una direzione non appartenente alla giacitura del poligono. Si dice **superficie prismatica** indefinita l'insieme delle rette aventi la direzione fissata e che passano per i vertici e per i punti dei lati di F. La parte di spazio delimitata dalla superficie prismatica e contenente il poligono si dice **prisma indefinito** (***figura 29a***) e si verifica che:

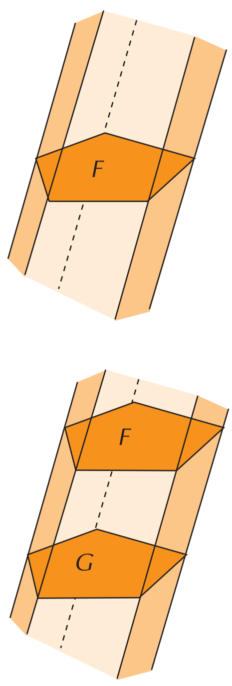
Le sezioni di un prisma indefinito con piani paralleli sono poligoni congruenti (***figura 29b***).

Possiamo ora dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE DI PRISMA

Si dice **prisma** la parte di prisma indefinito delimitato da una coppia di piani paralleli.

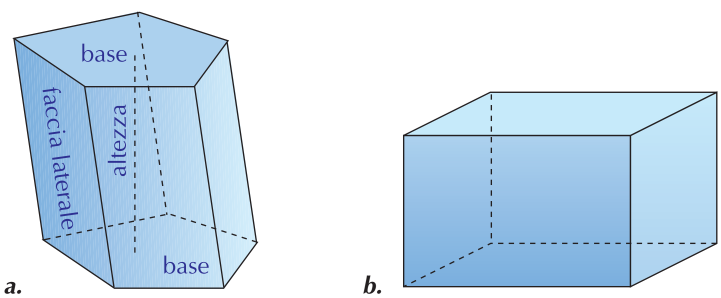
Figura 29



I poligoni individuati dai due piani paralleli si dicono **basi** del prisma, i parallelogrammi che lo delimitano si dicono **facce laterali**; **altezza** di un prisma è la distanza fra i piani delle due basi (***figura 30a***).
Se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi, il prisma si dice **retto**, in caso contrario si dice **obliquo**. Un prisma retto i cui poligoni di base sono poligoni regolari, si dice **prisma regolare**.
I prismi si possono classificare in base al tipo di poligono che costituisce le basi: si parla, ad esempio, di prisma a base triangolare, a base quadrangolare e così via. I prismi le cui basi sono dei parallelogrammi si dicono **parallelepipedi**.

Se la base di un parallelepipedo è un rettangolo e se il parallelepipedo è retto, si parla poi di **parallelepipedo rettangolo** (***figura 30b***); sia le facce che le basi di un tale parallelepipedo sono quindi dei rettangoli. Un particolare parallelepipedo rettangolo è il cubo che, come abbiamo visto, è anche un poliedro regolare.

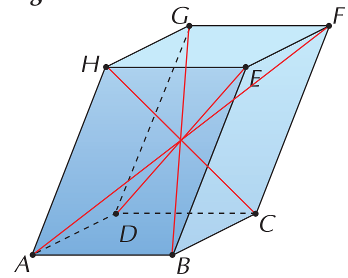
Figura 30



I parallelepipedi hanno le seguenti proprietà:

- le diagonali di un parallelepipedo, che sono quattro (in ***figura 31*** *AF*, *BG*, *CH*, *DE*), passano per uno stesso punto che le dimezza scambievolmente;
- in un parallelepipedo rettangolo le diagonali sono congruenti.

Figura 31

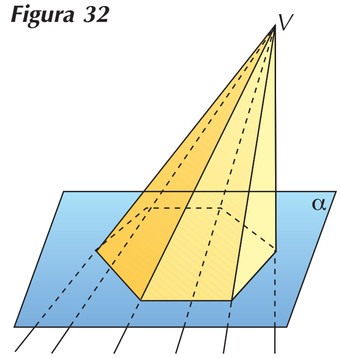


Le piramidi

DEFINIZIONE DI PIRAMIDE

Consideriamo un angoloide di vertice *V* ed un piano α non passante per *V* e che incontra tutti i suoi spigoli. Si dice **piramide** l'intersezione fra l'angoloide e il semispazio individuato da α che contiene *V* (***figura 32***).

Figura 32



Il punto *V* è il **vertice** della piramide, gli spigoli dell'angoloide sono gli **spigoli laterali** della piramide, il poligono individuato dall'angoloide sul piano α si dice **base** della piramide, i triangoli delimitati sulle facce dell'angoloide dai lati della base sono le **facce laterali**; si dice poi **altezza** la distanza del vertice *V* dal piano della base.

Diremo poi che una piramide è **retta** se la base è un poligono circoscrittibile ad una circonferenza il cui centro è il piede dell'altezza della piramide. Se una piramide è retta e la sua base è un poligono regolare, essa si dice **regolare**.

Valgono le seguenti proprietà.

- Le facce laterali di una piramide retta hanno tutte la stessa altezza che prende il nome di **apotema** della piramide (***figura 33***).
- La sezione di una piramide con un piano parallelo alla base è un poligono simile alla base (***figura 34***); i perimetri del poligono sezione e della base stanno fra loro come le distanze *OH* e *OK* del vertice dai loro piani, mentre le loro aree sono proporzionali ai quadrati di tali distanze.
- Se una piramide è regolare, le facce laterali e gli spigoli laterali sono tutti congruenti fra loro.

Figura 33

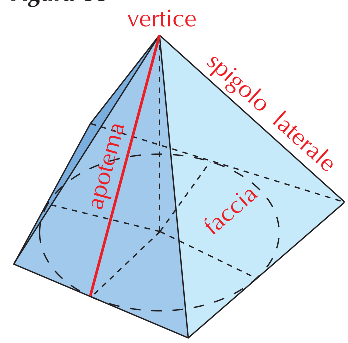
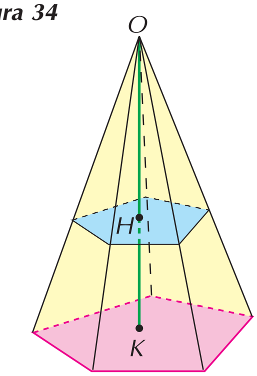


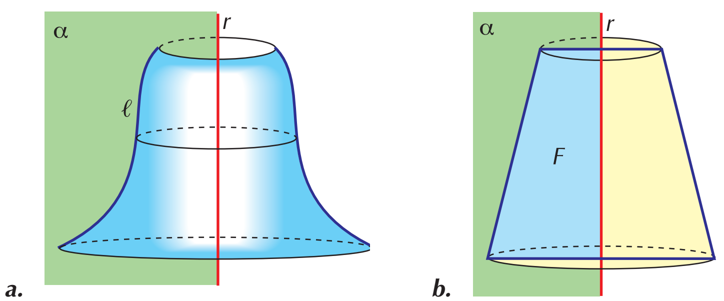
Figura 34



3.4 I solidi di rotazione

Consideriamo una retta *r* ed un semipiano α di origine *r*; sia poi ℓ una linea qualsiasi su α; se facciamo ruotare α attorno a *r* di un angolo giro, la linea ℓ genera una superficie che si dice **superficie di rotazione** (***figura 35a***). La linea ℓ si dice **generatrice** e la retta *r* **asse di rotazione**.
Consideriamo ora una superficie qualsiasi *F* su α; la rotazione di α attorno a *r* di un angolo giro genera questa volta un solido che si dice **solido di rotazione** (***figura 35b***).

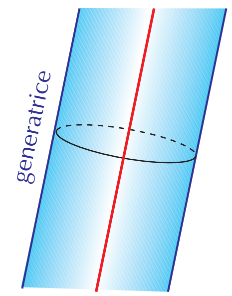
Figura 35



Vogliamo ora descrivere alcune superfici o solidi di rotazione particolari e individuare le loro proprietà; nella nostra trattazione considereremo solo rotazioni di un angolo giro, tale precisazione sarà quindi in seguito omessa.

Il cilindro

Figura 36

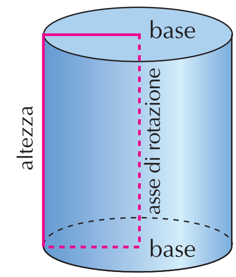


DEFINIZIONE DI CILINDRO

Si dice **superficie cilindrica indefinita** la superficie di rotazione che ha per generatrice una retta parallela all'asse di rotazione. Si dice **cilindro indefinito** il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare la striscia individuata dall'asse di rotazione e dalla generatrice attorno all'asse di rotazione stessa (***figura 36***).

Consideriamo ora un cilindro indefinito e due piani perpendicolari all'asse di rotazione; la parte di spazio delimitata dal cilindro indefinito e dai due piani si chiama **cilindro circolare retto** o, più semplicemente **cilindro** (***figura 37***).

Figura 37



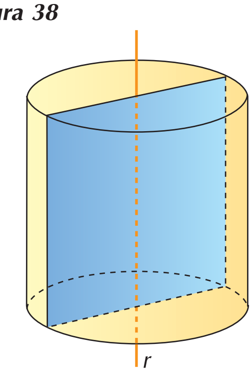
Un cilindro può essere quindi visto come il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati di un angolo giro.

I cerchi individuati dai piani secanti sono le **basi** del cilindro, i segmenti di generatrice compresi fra i piani delle basi si dicono anche **lati** del cilindro; la distanza fra i piani delle basi si dice **altezza**. Diremo poi che un cilindro è **equilatero** se la sua altezza è congruente al diametro di base.

Un cilindro ha le seguenti proprietà.

- Ogni piano perpendicolare all'asse di rotazione che interseca il cilindro individua cerchi congruenti alle basi; il raggio di uno qualsiasi di tali cerchi è il **raggio del cilindro**.
- L'intersezione fra un piano passante per l'asse di rotazione con il cilindro è un rettangolo (***figura 38***); in particolare, se il cilindro è equilatero si ha un quadrato.

Figura 38



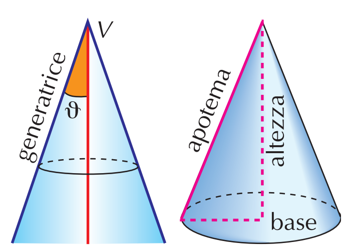
Il cono

DEFINIZIONE DI CONO

Si dice **superficie conica indefinita** la superficie di rotazione che ha per generatrice una semiretta avente origine in un punto V dell'asse di rotazione. Si dice **cono indefinito** il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare l'angolo individuato dall'asse di rotazione e dalla generatrice attorno all'asse di rotazione stesso (***figura 39a***). Il punto V si dice **vertice** del cono indefinito, l'angolo ϑ formato da una generatrice con l'asse di rotazione rappresenta l'angolo di semiapertura del cono.

Consideriamo ora un piano α, perpendicolare all'asse di rotazione, che interseca le generatrici di un cono indefinito; la parte di spazio che contiene il vertice e che è delimitata dal cono indefinito e dal piano α si chiama **cono circolare retto** o, più semplicemente **cono** (***figura 39b***).

Figura 39



a. ***b.***

Un cono può quindi essere visto come il solido che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti di un angolo giro.

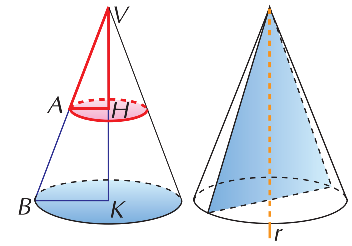
Il cerchio sezione è la **base** del cono, il segmento di generatrice compreso fra il vertice e la circonferenza di base si dice **apotema** del cono; il segmento individuato dal vertice e dal centro del cerchio di base rappresenta la distanza del vertice dalla base ed è **l'altezza** del cono. Diremo poi che un cono è **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro di base.
Un cono ha le seguenti proprietà.

- I piani perpendicolari all'asse di rotazione che intersecano il cono individuano cerchi i cui raggi AH e BK sono proporzionali sia alle distanze dei rispettivi piani dal vertice (segmenti VH e VK), sia ai segmenti di apotema fra il vertice ed i piani (segmenti VA e VB) (***figura 40a***) cioè

$$BK : AH = VK : VH = VB : VA$$

- L'intersezione di un piano passante per l'asse di rotazione con il cono è un triangolo isoscele (***figura 40b***), in particolare se il cono è equilatero, il triangolo è equilatero.

Figura 40



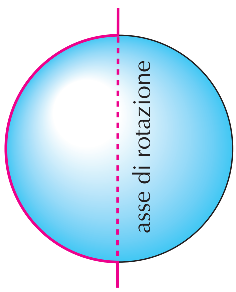
a. **b.**

La sfera

Si dice **superficie sferica** la figura generata dalla rotazione completa di una semicirconferenza attorno alla retta del diametro; si dice **sfera** il solido generato dalla analoga rotazione di un semicerchio (***figura 41***).

DEFINIZIONE DI SFERA

Figura 41

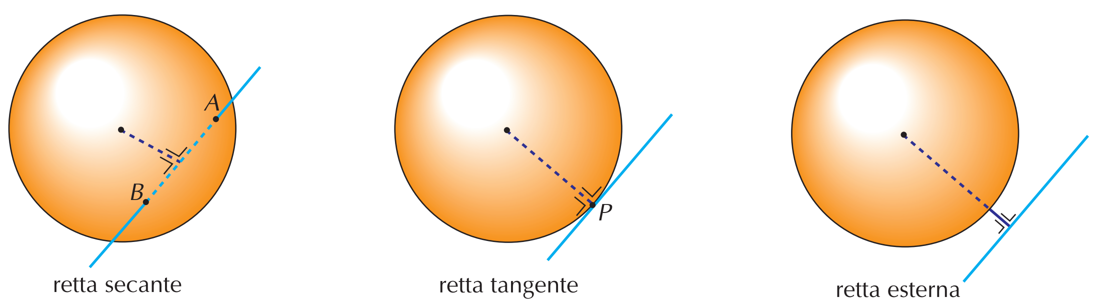


Il centro della semicirconferenza è il **centro** della sfera; si dice **raggio** la distanza del centro da uno qualunque dei punti della superficie sferica, **diametro** il segmento passante per il centro che ha per estremi due punti della sfera.

Individuiamo le proprietà di questa figura.

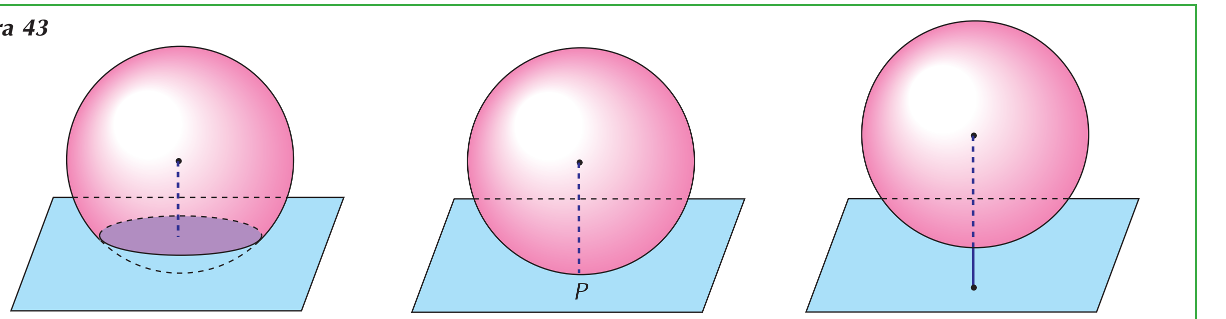
- Una retta ha in comune con una superficie sferica due punti, un solo punto o nessun punto a seconda che la sua distanza dal centro della superficie sia minore, uguale o maggiore del raggio (***figura 42***).

Figura 42



- Un piano ha in comune con una superficie sferica (***figura 43*** di pagina seguente):
  - una circonferenza se la sua distanza dal centro è minore del raggio; si dice in questo caso che il piano è **secante** rispetto alla sfera
  - un punto se la sua distanza dal centro è uguale al raggio; si dice in questo caso che il piano è **tangente** rispetto alla sfera
  - nessun punto se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio; si dice in questo caso che il piano è **esterno** rispetto alla sfera.

Figura 43



- Ogni piano che passa per il centro si dice **piano diametrale**.
- Ogni piano diametrale individua sulla superficie sferica una circonferenza che ha lo stesso centro e lo stesso raggio della superficie sferica stessa.
- Ogni altro piano non diametrale individua circonferenze aventi raggi minori di quello diametrale.

4 Misure di superfici e di volumi

4.1 La misura delle superfici

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 25

Sappiamo come calcolare le aree delle superfici di alcuni poligoni e di quella del cerchio; poiché le facce dei poliedri sono poligoni appartenenti ad un piano e le superfici di alcuni solidi di rotazione si possono assimilare a figure piane, non avremo difficoltà a calcolare le aree delle superfici della maggior parte dei solidi che abbiamo studiato.
Nel seguito, indicheremo con S_ℓ l'area della superficie laterale, con S_b quella di base, con S_t quella della superficie totale.

Il prisma

La superficie laterale di un prisma retto è costituita da tanti rettangoli aventi tutti la stessa altezza (in ***figura 44a*** abbiamo rappresentato lo sviluppo di un prisma retto a base pentagonale), la sua area si ottiene quindi moltiplicando la misura del perimetro di base, che indicheremo con $2p$, per quella dell'altezza h; la superficie totale si ottiene poi sommando a quella laterale le aree delle due basi.

$$S_\ell = 2p \cdot h \qquad\qquad S_t = S_\ell + 2S_b$$

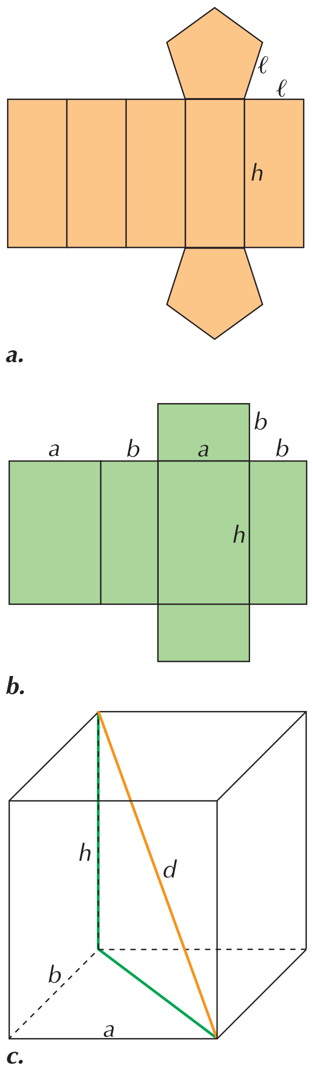
Nel caso particolare del parallelepipedo rettangolo, indicando con a e b le misure delle dimensioni del rettangolo di base e con h quella dell'altezza, si ha che (***figura 44b***):

$$S_\ell = 2h(a+b) \qquad\qquad S_t = 2h(a+b) + 2ab$$

Un'altra formula da ricordare relativamente al parallelepipedo rettangolo è quella che esprime la misura della diagonale d in funzione delle dimensioni a, b e h (***figura 44c***):

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

Figura 44

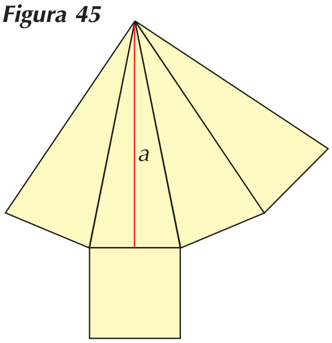


La piramide

La superficie laterale di una piramide è costituita da tanti triangoli quanti sono i lati del poligono di base; se la piramide è retta, sappiamo che le altezze di questi triangoli sono tutte congruenti e costituiscono l'apotema della piramide. In questo caso, la superficie laterale si ottiene moltiplicando il perimetro $2p$ del poligono di base per l'apotema e dividendo il prodotto per 2 (***figura 45***); per avere la superficie totale basta poi aggiungere l'area del poligono di base:

$$S_\ell = \frac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a \qquad\qquad S_t = S_\ell + S_b$$

Figura 45

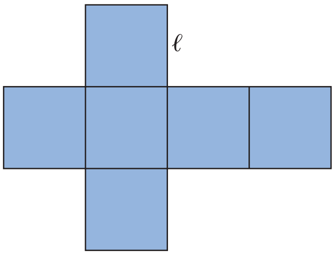


Il cubo

La superficie di un cubo è costituita da sei quadrati che hanno per lato lo spigolo del cubo (***figura 46***). Se indichiamo con ℓ la misura di tale spigolo, la superficie del solido è data dalla relazione:

$$S = 6\ell^2$$

Figura 46

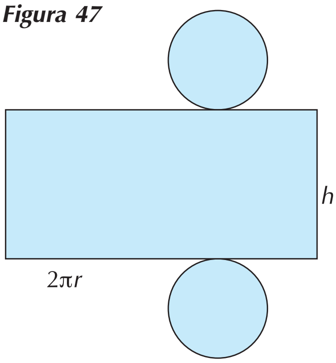


Il cilindro

Lo sviluppo piano della superficie laterale di un cilindro è il rettangolo che ha per base la circonferenza di base del cilindro e per altezza l'altezza del cilindro (***figura 47***); la superficie laterale e quella totale sono quindi date dalle relazioni:

$$S_\ell = 2\pi r \cdot h \qquad\qquad S_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

Figura 47

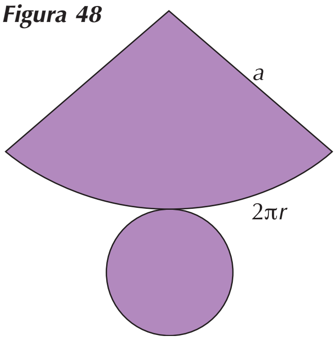


Il cono

Lo sviluppo piano di un cono è il settore circolare del cerchio di raggio uguale all'apotema del cono che insiste su un arco pari alla lunghezza della circonferenza del cerchio di base; la superficie laterale e quella totale sono quindi date dalle relazioni (***figura 48***):

$$S_\ell = \pi r \cdot a \qquad\qquad S_t = \pi r \cdot a + \pi r^2 = \pi r(a + r)$$

Figura 48



La sfera

Se si può pensare di "distendere" la superficie di un cilindro o di un cono su di un piano ottenendo figure geometriche note, la stessa cosa non si può fare per la sfera. Si dimostra tuttavia che l'area S di una superficie sferica di raggio r è uguale a quattro volte l'area del cerchio massimo, si ha quindi che:

$$S = 4\pi r^2$$

4.2 I volumi

Nel piano, per giungere alle formule del calcolo dell'area di un poligono, siamo passati attraverso il concetto di equivalenza. Possiamo seguire un analogo discorso nello spazio, intendendo come estensione di una figura solida la parte di spazio occupata. Diciamo allora che:

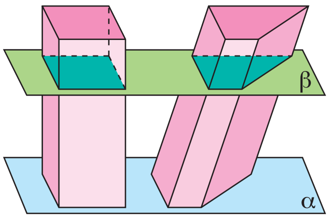
DEFINIZIONE DI EQUIVALENZA NELLO SPAZIO

nello spazio, due figure che hanno la stessa estensione sono **equivalenti**.

Per indicare che due figure dello spazio sono equivalenti diciamo che hanno lo stesso volume; il **volume** di un solido è quindi la caratteristica comune a tutti i solidi equivalenti.
Il confronto fra figure nello spazio per vedere se hanno la stessa estensione, cioè se sono equivalenti, utilizza un assioma che prende il nome di **Principio di Cavalieri** e che si basa sulle seguenti considerazioni.

Prendiamo due solidi che abbiano la base sullo stesso piano α e consideriamo tutti i possibili piani paralleli ad α (in ***figura 49*** ne abbiamo disegnato uno); le sezioni dei due solidi con tali piani possono essere poligoni diversi fra loro, ma se hanno la stessa area, cioè se sono equivalenti a coppie, è logico pensare che la loro sovrapposizione generi due solidi che hanno la stessa estensione. Enunciamo allora il seguente assioma.

Figura 49



A18. (Principio di Cavalieri). Se due solidi si possono disporre in modo che siano equivalenti le sezioni con ogni piano parallelo ad un piano α fissato, essi sono equivalenti.

Vediamo allora come si può calcolare il volume dei principali solidi. Cominciamo col dire che:

- se nel piano abbiamo assunto come unità di misura delle superfici un quadrato di lato unitario, nello spazio assumiamo come unità di misura un cubo di lato unitario
- se nel piano abbiamo dapprima calcolato l'area di un rettangolo e da quella formula abbiamo poi dedotto quella delle aree degli altri poligoni, nello spazio consideriamo dapprima un parallelepipedo rettangolo e deduciamo da esso le regole per il calcolo dei volumi degli altri solidi.

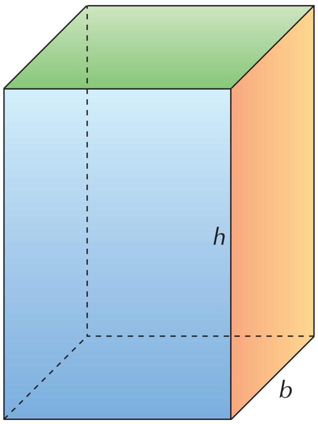
Si dimostra che:

il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle misure delle sue dimensioni.

Se a, b, h sono misure delle dimensioni del parallelepipedo (***figura 50***), si ha quindi che

$$V = abh$$

Figura 50



In base al principio di Cavalieri si può dimostrare che:

- **un prisma** ed un parallelepipedo sono equivalenti se hanno le basi equivalenti e le altezze congruenti; il volume di un prisma si calcola quindi con la formula

$$V = S_b \cdot h$$

  In particolare, il volume di un cubo di lato ℓ è $V = \ell^3$.

- **una piramide** è equivalente alla terza parte di un prisma che ha la stessa base e la stessa altezza della piramide; il volume di una piramide si calcola quindi con la formula

$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

- **un cilindro** ed un prisma sono equivalenti se hanno basi equivalenti ed altezze congruenti; il volume di un cilindro si calcola quindi con la formula

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

- **un cono** è equivalente alla terza parte di un cilindro avente la stessa base e la stessa altezza del cono; il volume di un cono si calcola quindi con la formula

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

- **una sfera** è equivalente al doppio della differenza fra un cilindro ed un cono aventi raggio di base ed altezza congruenti al raggio della sfera; il volume di una sfera si calcola quindi con la formula

$$V = 2\left(\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Concetti chiave e regole

Rette e piani nello spazio

- Due rette che non hanno punti di intersezione si dicono parallele se sono complanari, sghembe se appartengono a piani diversi
- due piani sono paralleli se non hanno punti di intersezione; esiste uno ed un solo piano passante per un punto A non appartenente ad un piano α e parallelo ad α
- due piani o sono paralleli o si intersecano lungo una retta; un fascio di piani paralleli individua su due rette trasversali segmenti proporzionali
- una retta che non ha punti in comune con un piano o che giace su di esso è parallela al piano
- una retta incidente ad un piano in un punto P è perpendicolare al piano se è perpendicolare a due delle rette del piano che passano per P; in tal caso essa è perpendicolare anche a tutte le altre rette del piano che passano per P
- se una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto P e da P esce una retta s perpendicolare ad una terza retta t di α, allora t è perpendicolare al piano di r e s (**teorema delle tre perpendicolari**).

Diedri e angoloidi

- Due semipiani che hanno l'origine in comune dividono lo spazio in due **angoli diedri** dei quali uno è concavo e l'altro è convesso
- ogni piano non parallelo allo spigolo che interseca un diedro definisce un angolo che rappresenta la sezione del diedro; se il piano è perpendicolare allo spigolo del diedro si parla di **sezione normale**; la misura di un diedro è la misura della sua sezione normale
- due piani sono perpendicolari se sono incidenti e formano diedri retti
- tutte le semirette che, uscendo da un punto P, intersecano i lati di un poligono appartenente ad un piano che non contiene P definiscono una superficie piramidale, la parte di spazio delimitata da una superficie piramidale si chiama **angoloide**
- un angoloide che ha tre facce si chiama triedro ed ha la caratteristica che ciascuna faccia è minore della somma delle altre due e maggiore della loro differenza.

Poliedri

- Esistono solo cinque **poliedri regolari**: il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro (le cui facce sono triangoli equilateri), l'esaedro o cubo (le cui facce sono quadrati), il dodecaedro (le cui facce sono pentagoni regolari)
- tutte le rette fra loro parallele che intersecano i lati di un poligono definiscono una **superficie prismatica**; la parte di spazio delimitata da una superficie prismatica e da due piani paralleli che la intersecano si chiama **prisma**, i poligoni definiti dalla superficie prismatica sui piani paralleli sono le basi del prisma; un prisma si dice:
  - **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi
  - **regolare** se, oltre ad essere retto, ha le basi che sono poligoni regolari
- una **piramide** è la parte di spazio delimitata da un angoloide e da un piano non passante per il vertice dell'angoloide; il poligono sezione è la base della piramide; una piramide si dice:
  - **retta** se il poligono di base si può circoscrivere ad una circonferenza e se la perpendicolare condotta dal vertice al piano di base cade nel centro della circonferenza; in questo caso le facce laterali hanno tutte la stessa altezza che costituisce l'**apotema** della piramide;
  - **regolare** se, oltre ad essere retta, il poligono di base è regolare; nelle piramidi regolari le facce laterali sono tutte congruenti.

Solidi di rotazione

- **Superficie cilindrica** è la superficie che si ottiene facendo ruotare una retta (la generatrice) di una rotazione completa attorno ad un'altra ad essa parallela (l'asse di rotazione); cilindro è la parte di spazio delimitata da una superficie cilindrica e da due piani paralleli che la secano; se i piani sono perpendicolari alle generatrici il cilindro si dice retto; se sezionando un cilindro retto con un piano passante per l'asse di rotazione si ottiene un quadrato, il cilindro si dice equilatero

- **superficie conica** è la superficie che si ottiene facendo ruotare un lato di un angolo attorno all'altro lato di una rotazione completa; si chiama cono la parte di spazio delimitata da una superficie conica e da un piano secante; se il piano è perpendicolare all'asse di rotazione il cono è retto; se sezionando un cono retto con un piano passante per l'asse di rotazione si ottiene un triangolo equilatero, il cono si dice equilatero
- **superficie sferica** è la superficie che si ottiene facendo ruotare una semicirconferenza di una rotazione completa attorno al suo diametro; sfera è la parte di spazio delimitata da una superficie sferica.

Il calcolo delle aree dei poliedri

Per calcolare la misura della superficie di un poliedro basta sviluppare tale superficie in un piano e calcolare le aree dei poligoni così ottenuti; in questo modo, indicando con S_b l'area della superficie di base, con S_ℓ l'area di quella laterale e con S_t l'area di quella totale, si ottengono le seguenti formule:

- prisma retto: $S_t = 2S_b + 2ph$
- piramide retta: $S_t = S_b + pa$
- cubo: $S_t = 6\ell^2$

Il calcolo delle aree dei solidi di rotazione

Gli sviluppi in un piano della superficie laterale di un cilindro e di un cono sono rispettivamente un rettangolo e un settore circolare. Indicando con r il raggio di base, con h l'altezza del cilindro e con a l'apotema del cono, si ottengono le seguenti formule:

- cilindro: $S_\ell = 2\pi rh$ $S_b = \pi r^2$ $S_t = 2\pi r(h + r)$
- cono: $S_\ell = \pi ra$ $S_b = \pi r^2$ $S_t = \pi r(a + r)$

Relativamente alla sfera si ha che: $S_t = 4\pi r^2$

Il calcolo dei volumi

Due solidi si dicono equivalenti se hanno la stessa estensione. Il **principio di Cavalieri** enuncia un criterio per stabilire se due solidi sono equivalenti:

– se due solidi si possono disporre in modo che risultino equivalenti tutte le loro sezioni con piani paralleli al piano della base, allora essi sono equivalenti.

In base a questo principio si ricavano le seguenti formule per il calcolo dei volumi:

- prisma: $V = S_b h$
- piramide: $V = \dfrac{1}{3} S_b h$
- cilindro: $V = \pi r^2 h$
- cono: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$
- sfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$