MATEMATICA per TUTTI

Monomi e polinomi

Monomi

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

I monomi. Un'espressione letterale come $\frac{1}{3}a^2b^3$ si dice **monomia** perché in essa non compaiono operazioni di addizione o sottrazione; in un monomio le lettere che compaiono hanno tutte esponenti interi positivi e non ci sono operazioni di divisione per qualche lettera.
Ad esempio:

$2ax^3 \qquad 5y^4 \qquad -\frac{2}{3}b^2xy$ sono monomi

$2a^{-3}b \qquad \frac{1}{6}xy^{-1} \qquad \frac{4x^2}{5ab}$ non sono monomi

Il **grado** di un monomio intero si determina sommando i gradi delle sue lettere; ad esempio

$-4a^2x^3$ è di quinto grado

$\frac{2}{3}bx^3y^3$ è di settimo grado

Se due o più monomi hanno la stessa parte letterale, identica sia nelle lettere che negli esponenti, si dice che sono **simili**; ad esempio, sono simili i seguenti gruppi di monomi

$$2ax^3 \qquad -5ax^3 \qquad \frac{3}{8}ax^3; \qquad\qquad 6b^2y^5 \qquad -\frac{1}{2}b^2y^5 \qquad -b^2y^5$$

2 Stabilisci se i seguenti monomi sono interi o frazionari e determina il grado di quelli interi:

a. $5xy^2 \qquad -\frac{2}{5}a^2x^{-1}y \qquad \frac{3}{7}xy^3$

b. $-\frac{1}{8}a^2b^3y \qquad \frac{5x^2}{3a} \qquad -\frac{2}{9}ay^{-2}$

c. $x^3y^4z^{-1} \qquad \frac{2}{7}a^3b^4c^2 \qquad -\frac{4}{5}a^3c^4$

3 Determina fra i seguenti quali sono i monomi simili:

a. $\frac{1}{2}a^3b^4 \qquad -\frac{1}{3}x^2y \qquad \frac{4}{5}b^3a^4 \qquad -\frac{1}{8}x^2y \qquad 3yx^2$

b. $\frac{1}{2}b^3 \qquad 4a^3b^4 \qquad -b^3 \qquad \frac{1}{10}a^3b^4 \qquad 8a^4b^3$

4 **ESERCIZIO SVOLTO**

L'addizione e la sottrazione fra monomi. Due monomi si possono sommare o sottrarre solo se sono simili; in questo caso basta sommare le parti numeriche e lasciare inalterata la parte letterale.
Ad esempio:

$2a^2y + 3a^2y = (2+3)a^2y = 5a^2y$

$3b^2x - 8b^2x = (3-8)b^2x = -5b^2x$

$\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{5}a^2$ non si possono sommare perché non sono simili

5 Calcola il valore delle seguenti espressioni in cui compaiono solo addizioni e sottrazioni fra monomi:

a. $5ax - \left[2ax + (3ax - ax) - \frac{1}{2}ax\right] - (3ax + ax - 6ax)$

b. $\frac{1}{2}x^2 - \left\{-\left[-2x^2 - \left(x^2 - \frac{3}{4}x^2\right) + x^2\right] - \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)\right\}$

c. $a^2b - \left[-\left(2a^2b - \frac{1}{2}a^2b\right) + \frac{3}{4}a^2b - (a^2b - 3a^2b)\right]$

d. $6xy^2 + \left\{-\left(\frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{2}xy^2\right) - \left[2xy^2 - \left(xy^2 + \frac{1}{4}xy^2\right) + 4xy^2\right]\right\}$

e. $\frac{1}{8}b^2y^2 - \left[\frac{1}{2}b^2y^2 - \left(\frac{3}{4}b^2y^2 - \frac{5}{4}b^2y^2 + b^2y^2\right)\right] - \left(\frac{3}{2}b^2y^2 - \frac{5}{4}b^2y^2\right)$

6 **ESERCIZIO SVOLTO**

La moltiplicazione e la divisione fra monomi. Due monomi si possono sempre moltiplicare o dividere; basta seguire questa semplice regola:

- si determina innanzi tutto il segno del prodotto o del quoziente
- si determina il coefficiente numerico moltiplicando o dividendo i coefficienti dei due monomi
- si determina la parte letterale sommando gli esponenti delle lettere uguali nel caso della moltiplicazione, sottraendo gli esponenti delle lettere uguali nel caso della divisione.

Ad esempio:

$(+5x^2y) \cdot (-2xy) = -10x^3y^2$

$$\left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right) \cdot \left(-\frac{6}{7}a^3x\right) = +\frac{1}{\cancelto{1}{2}} \cdot \frac{\cancelto{3}{6}}{7}a^6b^2x = +\frac{3}{7}a^6b^2x$$

$(+8x^3y^2z) : (-2xy^2) = -4x^2z$

$$\left(-\frac{3}{4}a^3b^4\right) : \left(+\frac{9}{8}a^2b^2\right) = -\frac{\cancelto{1}{3}}{\cancelto{1}{4}} \cdot \frac{\cancelto{2}{8}}{\cancelto{3}{9}}ab^2 = -\frac{2}{3}ab^2$$

7 Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni fra monomi:

a. $\left(-\frac{1}{2}a^3x^2y\right)\cdot\left(+\frac{4}{5}a^2y^2\right)$; $\left(+\frac{1}{8}x^2y^2z^3\right)\cdot\left(+\frac{12}{5}xy^4\right)$

b. $\left(-\frac{3}{5}a^3b^4z^2\right):\left(-\frac{1}{10}a^3bz\right)$; $\left(+\frac{1}{6}a^2b^2x^2\right):\left(-\frac{1}{3}ab^2x^2\right)$

c. $\left(-\frac{4}{5}x^3y^2\right)\cdot\left(-\frac{10}{3}a^2x\right):\left(+\frac{4}{3}axy\right)$; $\left(+\frac{2}{3}a^2b\right)\cdot\left(-\frac{6}{7}a^3x^3\right):\left(+\frac{2}{21}a^5b\right)$

8 **ESERCIZIO SVOLTO**

La potenza di monomi. Per elevare a potenza un monomio si eleva a potenza la parte numerica e si moltiplicano gli esponenti delle lettere per l'esponente che indica la potenza. Ad esempio:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^2=+\frac{1}{4}x^2y^4$$

$$\left(+\frac{3}{4}a^2b^3x\right)^3=+\frac{27}{64}a^6b^9x^3$$

$$\left(-\frac{5}{3}a^4b^2x^5\right)^3=-\frac{125}{27}a^{12}b^6x^{15}$$

9 Esegui le seguenti potenze di monomi:

a. $\left(+\frac{1}{2}a^3b^2\right)^2$; $\left(-\frac{1}{4}a^2b\right)^3$; $(-2a^4bx^2)^4$

b. $\left(-\frac{1}{6}b^2y^3\right)^3$; $\left(+\frac{2}{3}x^3y^4\right)^4$; $(-a^2xy^3)^5$

10 Esegui le seguenti espressioni e determina il loro valore:

a. $\frac{3}{8}a^2y\cdot\left(\frac{5}{2}a-\frac{11}{6}a\right)-\left(ay-\frac{2}{7}ay\right)\left(-\frac{3}{5}a^2+2a^2-\frac{7}{4}a^2\right)$

b. $\left(-\frac{1}{2}b^4y^3+\frac{4}{3}b^4y^3\right):\left(\frac{3}{4}by-\frac{1}{8}by\right):\left(\frac{5}{6}by-\frac{1}{3}by\right)$

c. $\left[\left(-\frac{5}{2}x^2yz^2\right)^2:\left(+\frac{15}{2}xy^2z\right)\right]^2-\left[\left(-\frac{1}{3}xz\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}xz\right)\right]^2$

d. $\left[-3x^2y\cdot\left(-\frac{5}{9}x^2y^2\right)\cdot\left(+\frac{1}{5}x^2y\right)\right]:\left[(-x^2y)\cdot(+2x^3y)\cdot\left(-\frac{2}{9}xy\right)\right]$

11 **ESERCIZIO SVOLTO**

***M.C.D.* e *m.c.m.* fra monomi.** Il *M.C.D.* fra due o più monomi si calcola prendendo solo le lettere comuni a tutti i monomi, una volta sola, con l'esponente più piccolo con cui compaiono; per quanto riguarda il coefficiente, si calcola il *M.C.D.* fra i coefficienti se questi sono interi, si assume come coefficiente 1 se sono frazionari. Ad esempio:

- $6ab$; $8a^2$; $12a^3x$

Il coefficiente è *M.C.D.* (6, 8, 12) = 2, la sola lettera comune è a, quindi *M.C.D.* = $2a$.

- $\frac{1}{2}a^2x^3y$; $\quad -\frac{3}{4}a^2x^2y^3$; $\quad +6x^4y^2$

  Il coefficiente è 1, le lettere comuni sono x e y, quindi $M.C.D. = x^2y$.

Il *m.c.m.* fra due o più monomi si calcola considerando tutte le lettere che compaiono nei vari monomi, con l'esponente più grande con cui compaiono; per quanto riguarda il coefficiente, si calcola il *m.c.m.* fra i coefficienti se questi sono interi, si assume come coefficiente 1 se sono frazionari. Ad esempio:

- $6ab$; $\quad 8a^2$; $\quad 12a^3x$

  Il coefficiente è $m.c.m.\ (6, 8, 12) = 24$, quindi $m.c.m. = 24a^3bx$.

- $\frac{1}{2}a^2x^3y$; $\quad -\frac{3}{4}a^2x^2y^3$; $\quad +6x^4y^2$

  Il coefficiente è 1, quindi $m.c.m. = a^2x^4y^3$.

12 Calcola *M.C.D.* e *m.c.m.* fra i seguenti gruppi di monomi:

a. $3ax^2$; $\quad 2ax$; $\quad -6a^2y$

b. $\frac{1}{2}x^2y^3$; $\quad -\frac{3}{4}x$; $\quad \frac{3}{5}x^2y^2$

Polinomi

13 **ESERCIZIO SVOLTO**

Sappiamo che un **polinomio è la somma algebrica di più monomi** e se in esso sono stati sommati tutti i monomi simili, si dice che il polinomio è ridotto in **forma normale**. Ad esempio

$2a - 3b + 4a - b^2$ ha forma normale $6a - 3b - b^2$

$\frac{1}{2}x^2 - 3a^3x + x^2 + a^3x$ ha forma normale $\frac{3}{2}x^2 - 2a^3x$

Il **grado complessivo** di un polinomio è il massimo dei gradi dei monomi che lo formano; i due polinomi precedenti hanno rispettivamente grado complessivo 2 e 4.
Un polinomio si dice poi **omogeneo** se tutti i suoi monomi sono dello stesso grado; ad esempio

$$5a^3 - 3a^2b + ab^2 - 4b^3$$

è un polinomio omogeneo di terzo grado. Tale polinomio è anche ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b ed è **completo** rispetto a ciascuna lettera perché sia di a che di b compaiono tutte le potenze da quella di grado 0 a quella di grado 3.

14 Individua le caratteristiche dei seguenti polinomi (grado, se sono ordinati, se sono completi rispetto a qualche lettera, se sono omogenei):

a. $3b^3 - 2b^2 + b - 7$ **b.** $a^3 - a^2b + 4ab^2 + b^3$

c. $4ax + 3x^2b - x^3$ **d.** $x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$

15 **ESERCIZIO SVOLTO**

Se un'espressione algebrica contiene solo **addizioni o sottrazioni** di polinomi, basta togliere le parentesi ricordando che un segno $+$ davanti ad una parentesi non cambia i segni dei monomi che contiene, mentre un segno $-$ li fa cambiare tutti; ad esempio:

$$(3a-2b^2+1)+\left(\frac{1}{2}a-4\right)-(b^2+a-1)=$$

$$=\underline{3a}-\underline{\underline{2b^2}}+1+\underline{\frac{1}{2}}a-4-\underline{\underline{b^2}}-\underline{a}+1=$$

$$=\frac{5}{2}a-3b^2-2$$

16 Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a. $-(a-4b)+(2a+b)$

b. $+(7x^2-3y)-(4x^2-y)$

c. $(x^2-y^2)+(3xy-2)-(x^2-2xy-4)$

d. $\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}y^3\right)+\left(-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}y^3\right)$

e. $\left(4b^3-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}a^2-b^3+\frac{1}{4}\right)-(a^2-5b^3)$

f. $\left[\frac{2}{3}a^2b-\left(-\frac{1}{4}ab^3+\frac{2}{5}a^4\right)\right]-\left[\frac{3}{5}a^4-\left(\frac{3}{4}ab^3-\frac{1}{3}a^2b\right)\right]$

g. $2x^2-\left\{-\left[3ax+x^2-\left(2ax-\frac{1}{2}x^2\right)\right]-\left(-2ax-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}$

17 **ESERCIZIO SVOLTO**

Per **moltiplicare un polinomio per un monomio** si moltiplica il monomio per ciascun termine del polinomio; ad esempio:

$$x\cdot(2x+y)=x\cdot 2x+x\cdot y=2x^2+xy$$

$$-3a\left(\frac{1}{9}a-\frac{2}{3}a^2x+1\right)=-3a\cdot\frac{1}{9}a-3a\cdot\left(-\frac{2}{3}a^2x\right)-3a\cdot 1=-\frac{1}{3}a^2+2a^3x-3a$$

Per **moltiplicare un polinomio per un polinomio** si moltiplica ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio, riducendo poi eventualmente i monomi simili; ad esempio:

$$(a+b)(3a-2b)=a\cdot 3a+a\cdot(-2b)+b\cdot 3a+b\cdot(-2b)=$$

$$=3a^2-\underline{2ab}+\underline{3ab}-2b^2=3a^2+ab-2b^2$$

Vediamo altri due esempi.

$(a-3x)(2a-x^2)=2a^2-ax^2-6ax+3x^3$

$(a^2+a-3)(2a+1)=2a^3+\underline{\underline{2a^2}}-\underline{6a}+\underline{\underline{a^2}}+\underline{a}-3=2a^3+3a^2-5a-3$

18 Esegui i seguenti prodotti di polinomi:

a. $(3x+1)(-2x+3)$; $\quad(2a-3x)(3a+5x^2)$

b. $(x-a)(a-b+7)$; $\quad(2x-3y)(-x^2+2xy+b^2)$

c. $(a-3b+1)(a^2-3b^2)$; $\quad(7-2a)(2+4a+b)$

d. $(a-2b+c)(a+b-c)$; $\quad(3a+2-x)(-2a+1+x)$

e. $2a(a-b)(2a+3b)$; $\quad(2-b)(b+3)(b-1)$

19 Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a. $(2a+b)(3a-b)+(a-b)(2a+4b)$

b. $(a^2-3)(a^2+4)-(a^2+1)(a^2-2)-a^2(a^2-1)$

c. $(2x+b)(-3x+b+2)-(x+2b)(4x-3b+1)$

d. $-\frac{1}{2}x^2(2x-4y-3)+2x^2\left(3x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right)$

20 **ESERCIZIO SVOLTO**

Ricordiamo le regole relative ai prodotti notevoli:

- $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$

  Ad esempio:

  $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

  $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2=a^2+2\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}b\right)+\left(-\frac{1}{2}b\right)^2=a^2-ab+\frac{1}{4}b^2$

- $\boldsymbol{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$

  Ad esempio:

  $(a+b-3)^2=a^2+b^2+9+2ab-6a-6b$

  $(2x-x^2-y)^2=4x^2+x^4+y^2-4x^3-4xy+2x^2y$

- $\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

  Ad esempio:

  $(2x-b)(2x+b)=4x^2-b^2$

  $\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y^2\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y^2\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{9}{16}y^4$

  $(-5+3x)(-5-3x)=25-9x^2$

■ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}^3$

Ad esempio:

$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$

$(2a-b)^3=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(-b)+3\cdot(2a)\cdot(-b)^2+(-b)^3=8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$

21 Sviluppa i seguenti quadrati di binomi:

a. $(x+2y)^2$; $(3a-b)^2$; $(-a+3)^2$

b. $\left(2b+\frac{1}{2}\right)^2$; $(x-7y)^2$; $\left(-2y+\frac{1}{2}y^2\right)^2$

c. $(x^3-y^3)^2$; $\left(\frac{1}{2}x^2-a^2\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}y^2-3b\right)^2$

22 Sviluppa i seguenti quadrati di trinomi:

a. $(2a-b+1)^2=4a^2+b^2+1+2\cdot(2a)\cdot(-b)+2\cdot(2a)\cdot(1)+2\cdot(-b)\cdot(1)=$ ....

$(a+2x-3)^2=a^2+4x^2+9+2\cdot(...)\cdot(...)+2\cdot(...)\cdot(...)+2\cdot(...)\cdot(...)=$ ....

b. $(a^2-2x+y)^2$; $\left(\frac{1}{2}x-y+z\right)^2$

c. $(x^2-a^2+b)^2$; $\left(-2a+\frac{1}{2}b^2+y^2\right)^2$

d. $(a^2-2x+y)^2$; $\left(\frac{1}{3}a+3x-2\right)^2$

23 Sviluppa i seguenti prodotti del tipo $(a+b)(a-b)$:

a. $(3x-1)(3x+1)=(3x)^2-(1)^2=$ ....

b. $(-2a+b)(-2a-b)=(-2a)^2-(b)^2=$ ....

c. $(x-3)(x+3)$; $(a^2-3)(a^2+3)$

d. $(x-y^2)(x+y^2)$; $\left(-\frac{3}{2}-y\right)\left(-\frac{3}{2}+y\right)$

e. $(4b+5a)(4b-5a)$; $(-2+a^3)(-2-a^3)$

24 Sviluppa i seguenti cubi di binomi:

a. $(x+3)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3=$ ....

b. $(2x-1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(-1)+3\cdot(2x)\cdot(-1)^2+(-1)^3=$ ....

c. $(x+2y)^3$; $(a-2b)^3$

d. $\left(\frac{1}{2}+x\right)^3$; $\left(3a-\frac{1}{3}y\right)^3$

e. $\left(\frac{1}{3}a^2-2\right)^3$; $(-2a-b^2)^3$

f. $\left(\frac{3}{2}a^2+b\right)^3$; $\left(-\frac{1}{3}-ax\right)^3$

25 **ESERCIZIO SVOLTO**

Per eseguire la **divisione di un polinomio per un monomio** si divide ciascun termine del polinomio per il monomio dato; ad esempio:

$$(4x^2y - 6xy^2) : 2xy = 4x^2y : 2xy - 6xy^2 : 2xy = 2x - 3y$$

$$\left(5a^3b^2 - 4a^2b^2 + \frac{1}{2}a^2b^3\right) : (-a^2b^2) = 5a^3b^2 : (-a^2b^2) - 4a^2b^2 : (-a^2b^2) + \frac{1}{2}a^2b^3 : (-a^2b^2) =$$

$$= -5a + 4 - \frac{1}{2}b$$

26 Esegui le seguenti divisioni:

a. $(6a^2b + 3b^2) : (3b)$; $\quad (25x^3z - 15x^2z + 20xz) : (5xz)$

b. $\left(\frac{1}{2}a^3x^3 - \frac{3}{4}a^2x^2 + \frac{1}{6}a^2x\right) : \left(-\frac{1}{2}a^2x\right)$; $\quad \left(-a^3b + \frac{1}{2}ab^2 - 4a^2b^3\right) : \left(-\frac{1}{2}ab\right)$

c. $\left(2x^4y - 8x^2y^2 + 6x^3y^4 - 4x^3y^2\right) : \left(-\frac{1}{3}x^2y\right)$

d. $\left(\frac{4}{5}a^2b^3x^2 - \frac{1}{2}ab^2x^4 + \frac{1}{6}a^3bx^2 - \frac{2}{5}a^2bx^3\right) : \left(\frac{3}{10}abx^2\right)$

27 Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a\right) + \left(x + \frac{3}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x - 2a\right)^2$

b. $\left(2x - \frac{1}{3}y\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(x + \frac{1}{2}y\right) - (x + y - 1)^2 + 2\left(\frac{5}{3}xy - x - y\right)$

c. $\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}a^2\right]\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4} + a\right) + \left(\frac{1}{4} - a\right)^2 - (a^2 - 1)(a^2 + 1)$

d. $(a + 2b)^3 + (2a - b)^3 - 3a^2(3a - 2b) - (b^2 + 1)(7b - 2a)$

e. $\left[(a - 3x)^3 + (3x - a)(9x^2 + 3ax + a^2)\right] : (-9ax) + 2(a + 5x)$

28 **ESERCIZIO SVOLTO**

Sappiamo che il **resto della divisione** di un polinomio $P(x)$ per un binomio del tipo $(x - a)$ è dato da $P(a)$, cioè dal valore del polinomio quando alla variabile x si sostituisce il valore a. Ad esempio:

- $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ calcoliamo il resto della divisione per $(x - 1)$:

  $R = P(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 2$

- $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 3$ calcoliamo il resto della divisione per $(x + 1)$:

  $R = P(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) - 3 = 2 + 3 - 2 - 3 = 0$

Il resto della divisione ci dà indicazioni sulla divisibilità di $P(x)$ per $(x - a)$:

- se $P(a) = 0$ allora $P(x)$ è divisibile per $(x - a)$
- se $P(a) \neq 0$ allora $P(x)$ non è divisibile per $(x - a)$

Il polinomio $P(x)$ del primo esempio non è divisibile per $(x - 1)$; il polinomio $P(x)$ del secondo esempio è divisibile per $(x + 1)$.

29 Calcola il resto della divisione dei polinomi P assegnati per i binomi indicati accanto e stabilisci la loro divisibilità:

a. $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ $\quad (x - 2), \quad (x - 1), \quad (x + 1)$

b. $P(a) = 3a^2 - a - 2$ $\quad (a - 1), \quad (a - 3), \quad (a + 1)$

c. $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - x + 2$ $\quad (x + 2), \quad (x - 2), \quad (x - 1)$

d. $P(y) = y^4 - y^2 - 72$ $\quad (y + 3), \quad (y - 2), \quad (y + 4)$

e. $P(a) = -2a^3 + 33a - 4$ $\quad (a + 2), \quad (a + 4), \quad (a - 4)$

30 **ESERCIZIO SVOLTO**

Eseguiamo la divisione di un polinomio $P(x)$ per il binomio $(x - a)$ mediante la **regola di Ruffini**. Calcoliamo quoziente e resto di $(4x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$.

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 4 & -5 & 3 & -1 \\
1 & & 4 & -1 & 2 \\
\hline
 & 4 & -1 & 2 & 1
\end{array}
$$

← coefficienti del polinomio dividendo

termine a →

← riga dei prodotti

← resto della divisione

↑ coefficienti del polinomio quoziente

Per costruire la tabella ricorda che si sommano i numeri sulla stessa verticale e si moltiplicano man mano i numeri dell'ultima riga per il termine a.

Il polinomio quoziente è di secondo grado e si ha che $\quad Q(x) = 4x^2 - x + 2 \quad$ e $\quad R = 1$.

31 Calcola quoziente e resto delle seguenti divisioni applicando la regola di Ruffini:

a. $(y^3 - 3y - 2) : (y - 2)$

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
2 & & 2 & 4 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{array}
$$

← manca il termine di secondo grado, il suo coefficiente è 0

$Q(y) = ...$ $\qquad R = ...$

b. $(x^4 - 3x^2 + 1) : (x + 1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\
-1 & & & & & \\
\hline
 & & & & &
\end{array}
$$

← mancano il termine di terzo e di primo grado

$Q(x) = ...$ $\qquad R = ...$

c. $(x^3 - 5x^2 + 4x - 1) : (x - 2)$

d. $(2x^4 - 3x^2 + 5x - 4) : (x + 1)$

e. $(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)$

f. $(x^4 - 3x^2 + 5x + 12) : (x + 2)$

g. $(x^3 + 2x^2 - 9) : (x + 3)$

h. $(3x^3 + 5x^2 - 5x + 2) : (x - 2)$

Risultati di alcuni esercizi.

5. **a.** $\frac{7}{2}ax$; **b.** $-\frac{1}{4}x^2$; **c.** $-\frac{1}{4}a^2b$; **d.** xy^2; **e.** $-\frac{1}{8}b^2y^2$.

7. **a.** $-\frac{2}{5}a^5x^2y^3$; $\frac{3}{10}x^3y^6z^3$; **b.** $6b^3z$; $-\frac{1}{2}a$; **c.** $2ax^3y$; $-6x^3$.

9. **a.** $\frac{1}{4}a^6b^4$; $-\frac{1}{64}a^6b^3$; $16a^{16}b^4x^8$; **b.** $-\frac{1}{216}b^6y^9$; $\frac{16}{81}x^{12}y^{16}$; $-a^{10}x^5y^{15}$.

10. **a.** $\frac{1}{2}a^3y$; **b.** $\frac{8}{3}b^2y$; **c.** $\frac{2}{3}x^6z^6$; **d.** $\frac{3}{4}y$.

12. **a.** $M.C.D. = a$, $m.c.m. = 6a^2x^2y$; **b.** $M.C.D. = x$, $m.c.m. = x^2y^3$.

16. **a.** $a + 5b$; **b.** $3x^2 - 2y$; **c.** $5xy - y^2 + 2$; **d.** $\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{4}y^3$; **e.** $10b^3 - \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{4}$; **f.** $-a^4 + \frac{1}{3}a^2b + ab^3$;
g. $3x^2 - ax$.

19. **a.** $8a^2 + 3ab - 5b^2$; **b.** $-a^4 + 3a^2 - 10$; **c.** $-10x^2 - 6bx + 3x + 7b^2$; **d.** $5x^3 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{5}{2}x^2$.

24. **a.** $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; **b.** $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$;
c. $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$; $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$;
d. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$; $27a^3 - 9a^2y + ay^2 - \frac{1}{27}y^3$;
e. $\frac{1}{27}a^6 - \frac{2}{3}a^4 + 4a^2 - 8$; $-8a^3 - 12a^2b^2 - 6ab^4 - b^6$;
f. $\frac{27}{8}a^6 + \frac{27}{4}a^4b + \frac{9}{2}a^2b^2 + b^3$; $-\frac{1}{27} - \frac{1}{3}ax - a^2x^2 - a^3x^3$.

26. **a.** $2a^2 + b$; $5x^2 - 3x + 4$; **b.** $-ax^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$; $2a^2 - b + 8ab^2$;
c. $-6x^2 + 24y - 18xy^3 + 12xy$; **d.** $\frac{8}{3}ab^2 - \frac{5}{3}bx^2 + \frac{5}{9}a^2 - \frac{4}{3}ax$

27. **a.** $x^2 + 5ax - 4a^2$; **b.** $2x^2 - \frac{23}{36}y^2 - 1$; **c.** $1 - \frac{3}{4}a^4$; **d.** $20ab^2 + 2a - 7b$; **e.** $7x + 3a$.

29. **a.** $P(2) = 13$; $P(1) = 6$; $P(-1) = 10$; **b.** $P(1) = 0$ divisibile; $P(3) = 22$; $P(-1) = 2$;
c. $P(-2) = -44$; $P(2) = 0$ divisibile; $P(1) = -2$;
d. $P(-3) = 0$ divisibile; $P(2) = -60$; $P(-4) = 168$;
e. $P(-2) = -54$; $P(-4) = -8$; $P(4) = 0$ divisibile.

31. **a.** $Q(y) = y^2 + 2y + 1$; $R = 0$;
b. $Q(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$; $R = -1$;
c. $Q(x) = x^2 - 3x - 2$; $R = -5$;
d. $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 6$; $R = -10$;
e. $Q(x) = x^2 + x - 1$; $R = 0$;
f. $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$; $R = 6$;
g. $Q(x) = x^2 - x + 3$; $R = -18$;
h. $Q(x) = 3x^2 + 11x + 17$; $R = 36$.