MATEMATICA per TUTTI

Parallelogrammi e trapezi

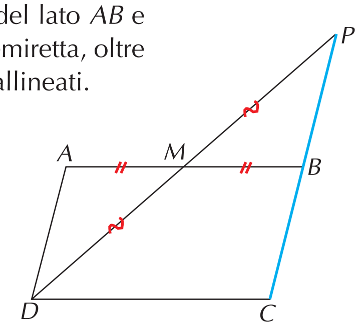
1 **ESERCIZIO GUIDATO**

Un **parallelogramma** è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli; gode delle seguenti proprietà:

- ha i lati opposti congruenti
- ha gli angoli opposti congruenti
- ha gli angoli adiacenti allo stesso lato che sono supplementari
- ha le diagonali che si tagliano scambievolmente a metà.

Sfruttando queste caratteristiche dimostriamo il seguente teorema.

Dato il parallelogramma $ABCD$, indichiamo con M il punto medio del lato AB e tracciamo da D la semiretta DM; prendiamo poi un punto P su tale semiretta, oltre M, in modo che $PM \cong DM$. Dimostriamo che i punti C, B, P sono allineati.



Costruiamo la figura e scriviamo ipotesi e tesi del teorema.

Hp. $ABCD$ parallelogramma
$AM \cong$ ....
$MP \cong$ ....

Th. C, B, P allineati

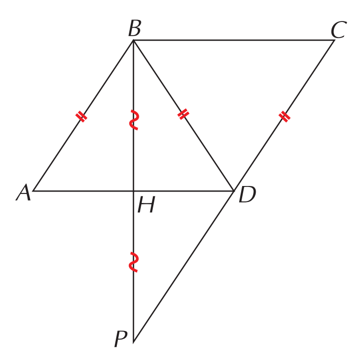
Dimostrazione.
Per dimostrare che C, B e P sono allineati, basta dimostrare che l'angolo $\widehat{CBP}$ è piatto.
Considera i triangoli AMD e MBP essi hanno:

$AM \cong$ .... per ....
$DM \cong$ .... per ....
$\widehat{AMD} \cong$ .... perché ....

Essi sono quindi congruenti per il .... criterio di congruenza e in particolare $\widehat{DAM} \cong \widehat{MBP}$.

Poiché $\widehat{DAM} + \widehat{MBC} \cong \pi$ perché angoli .... allo stesso lato di un parallelogramma anche $\widehat{MBP} + \widehat{MBC} =$ .... e quindi ....

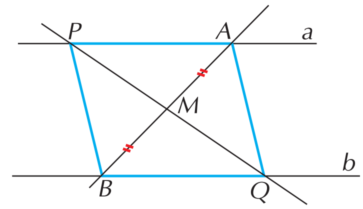
2 In un parallelogramma $ABCD$ la diagonale BD è congruente al lato AB; traccia dal vertice B la perpendicolare BH al lato AD e prolungala di un segmento $HP \cong BH$. Dimostra che i punti C, D, P sono allineati e che l'angolo $\widehat{PBC}$ è retto.
(Suggerimento: osserva le congruenze segnate in figura e, dopo averle motivate, deduci da esse che l'angolo $\widehat{PDC}$ è un angolo piatto)



3 **ESERCIZIO SVOLTO**

Per riconoscere se un quadrilatero è un parallelogramma basta controllare che sia rispettata la definizione oppure che sia vera una delle proprietà enunciate nell'esercizio 1. Si può inoltre verificare che il quadrilatero abbia una coppia di lati opposti contemporaneamente congruenti e paralleli.
Tenendo presenti queste possibilità dimostriamo il seguente teorema.
Date due rette parallele a e b, tracciamo una trasversale che le incontra nei punti A e B; per il punto medio M di AB tracciamo una seconda trasversale che incontra le due rette in P e Q. Dimostriamo che il quadrilatero $APBQ$ è un parallelogramma.

Costruiamo la figura e scriviamo l'ipotesi e la tesi.



Hp. $a \parallel b$ **Th.** $APBQ$ parallelogramma

$AM \cong$ ....

Dimostrazione.

Considera i triangoli PAM e BQM; di essi sappiamo che:

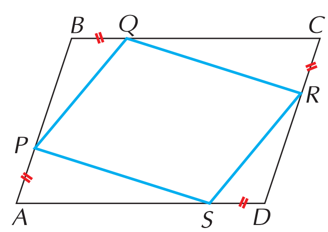
$AM \cong MB$ per ipotesi

$\widehat{PAM} \cong \widehat{MBQ}$ perché alterni interni della retta parallele a e b

$\widehat{PMA} \cong \widehat{BMQ}$ perché opposti al vertice.

I due triangoli sono quindi congruenti per il secondo criterio ed in particolare possiamo dire che $PM \cong MQ$.
Allora se $AM \cong MB$ e $PM \cong MQ$, il quadrilatero $APBQ$ è un parallelogramma perché ha le diagonali che si tagliano a metà.

4 Disegna un parallelogramma $ABCD$ e prendi sui suoi lati, nello stesso verso, quattro punti P, Q, R, S in modo che $AP \cong BQ \cong CR \cong DS$. Dimostra che il quadrilatero $PQRS$ è un parallelogramma.
(Suggerimento: basta dimostrare che $PQRS$ ha i lati opposti congruenti)



5 **ESERCIZIO GUIDATO**

Sappiamo che un parallelogramma che ha gli angoli retti si chiama **rettangolo**, un parallelogramma con i lati congruenti si chiama **rombo**, un parallelogramma con i lati congruenti e gli angoli retti si chiama **quadrato**.
Questi parallelogrammi hanno ovviamente le stesse proprietà degli altri parallelogrammi; in più hanno le seguenti:

- un rettangolo ha le diagonali congruenti
- un rombo ha le diagonali perpendicolari e bisettrici degli angoli cui si riferiscono
- un quadrato ha le diagonali congruenti, perpendicolari e bisettrici degli angoli.

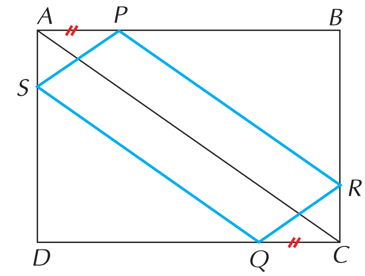
Tenendo presenti queste proprietà, dimostriamo il seguente teorema.

Dato il rettangolo $ABCD$ e tracciata la sua diagonale AC, prendiamo un punto P su AB ed un punto Q su DC in modo che $AP \cong CQ$; tracciamo poi da P e da Q le parallele alla diagonale AC che incontrano CB in R e AD in S. Dimostriamo che il quadrilatero $PRQS$ è un parallelogramma. Come deve essere preso il punto P affinché tale parallelogramma diventi un rombo?

Hp. *ABCD* rettangolo **Th.** *PRQS* parallelogramma

$AP \cong$ ....

$PR \parallel$ .... $\parallel$ ....



Dimostrazione.

Basta dimostrare che *PR* e *QS* sono congruenti e paralleli:

$PR \parallel QS$ perché ....

I triangoli *DSQ* e *BRP* sono triangoli rettangoli congruenti perché ....

Quindi ....

Rifletti ora sul fatto che affinché *PRQS* sia un rombo i lati devono essere tutti congruenti, oppure le diagonali devono essere perpendicolari, quindi *P* deve essere ....

6 ESERCIZIO GUIDATO

La corrispondenza di Talete e le sue conseguenze. Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali e se su una trasversale ci sono due segmenti congruenti, allora anche i corrispondenti sull'altra trasversale lo sono. Fai attenzione al fatto che i quattro segmenti non sono tutti congruenti fra loro.

Conseguenza immediata di questo teorema è che:

- se dal punto medio di un lato di un triangolo si traccia la parallela ad un altro lato, questa incontra il terzo lato nel punto medio
- la congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato e congruente alla sua metà.

Tenendo presente quanto ricordato, dimostriamo il seguente teorema.

Dato il triangolo *ABC*, tracciamo la mediana *BM* e dai punti medi *N* e *P* dei lati *BC* e *BA* tracciamo le parallele a tale mediana che incontrano il lato *AC* in *Q* e *R*. Dimostriamo che:

a. *AC* rimane diviso dalla mediana e dalle sue parallele in quattro segmenti congruenti fra loro

b. il quadrilatero *PNQR* è un parallelogramma.

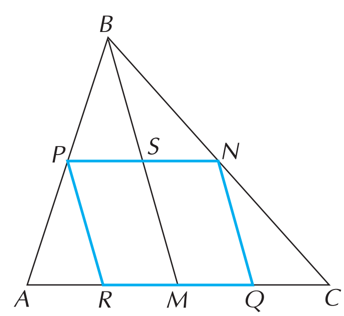
Hp. $AM \cong$ .... **Th.** $AR \cong RM \cong MQ \cong QC$

$BN \cong$ .... *PNQR* parallelogramma

$BP \cong$ ....

$NQ \parallel$ ....

$PR \parallel$ ....



Dimostrazione.

a. Considera il triangolo *BCM*: *N* è punto medio di *BC* e $NQ \parallel BM$, quindi ....

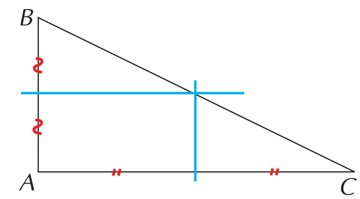
Considera il triangolo *BMA*: *P* è punto medio di *AB* e $PR \parallel BM$, quindi ....

Allora, essendo *M* punto medio di *AC* ....

b. *P* e *N* sono punti medi dei lati *AB* e *BC*, quindi *PN* ....

$NQ \parallel PR$ perché ...., quindi ....

7 Disegna un triangolo rettangolo e traccia gli assi dei suoi cateti. Dimostra che il loro punto di intersezione appartiene all'ipotenusa. (Suggerimento: l'asse di un segmento è la perpendicolare condotta per il suo punto medio ed in questo caso l'asse del cateto *AB* è .... ad *AC* ed interseca l'ipotenusa *BC* nel punto ....
Analogamente, l'asse del cateto *AC* ....)



8 Dimostra che se in un trapezio congiungi i punti medi dei lati non paralleli, ottieni un segmento congruente alla semisomma delle basi.
(Suggerimento: osserva che *MN* è parallelo alle basi del trapezio perché .... Traccia la diagonale *AC* e indica con *P* il punto di intersezione della diagonale con il segmento *MN*. Applica il teorema della corrispondenza di Talete prima al triangolo *ADC* e poi al triangolo *CAB*)