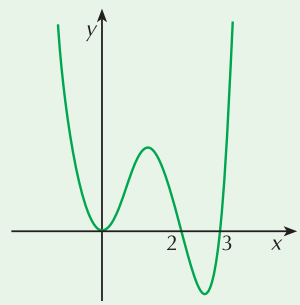
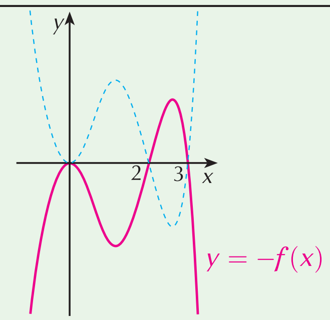
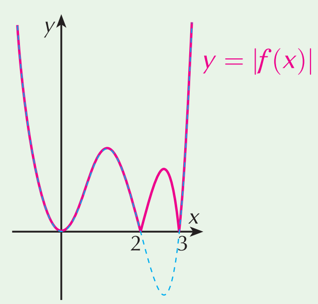
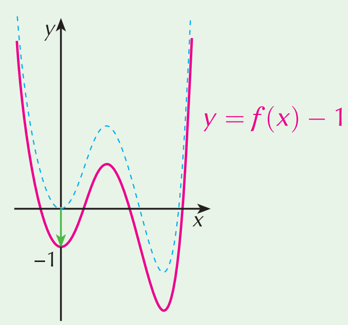
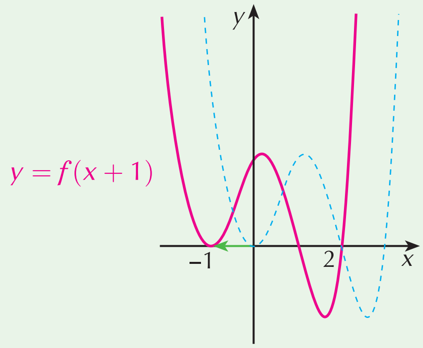
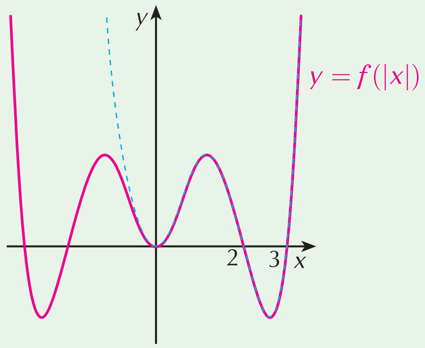
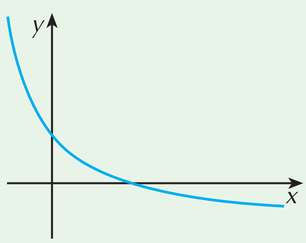
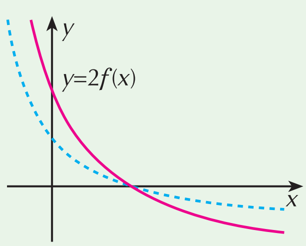
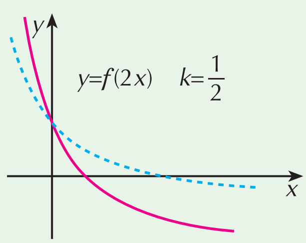
I grafici deducibili

A partire dal grafico di una funzione $f(x)$ e applicando opportune trasformazioni è possibile costruire il grafico delle seguenti funzioni:

funzione $f(x)$	
$y = -f(x)$ Si esegue una simmetria rispetto all'asse x dell'intero grafico	
$y = \|f(x)\|$ Si mantengono le parti positive del grafico e si esegue una simmetria rispetto all'asse x delle sole parti negative	
$y = f(x) + k$ Si esegue una traslazione di vettore $\vec{v} = (0, k)$ del grafico di $f(x)$	

$y = f(x+k)$ Si esegue una traslazione di vettore $\vec{v} = (-k,\ 0)$ del grafico di $f(x)$	
$y = f(\lvert x \rvert)$ Si considera il grafico di $f(x)$ solo per la parte in cui è $x \geq 0$ e si completa il grafico eseguendo una simmetria rispetto all'asse y	

Altri grafici si ottengono applicando opportune dilatazioni:

$y = f(x)$	
$y = k\, f(x)$ Si esegue una dilatazione di fattore k lungo l'asse y	
$y = f\left(\dfrac{x}{k}\right)$ Si esegue una dilatazione di fattore k lungo l'asse x	

Dal grafico di $f(x)$ a quello della sua derivata $f'(x)$

Noto il grafico di una funzione $f(x)$, possiamo costruire direttamente quello della sua derivata $f'(x)$ se teniamo presenti alcune considerazioni.

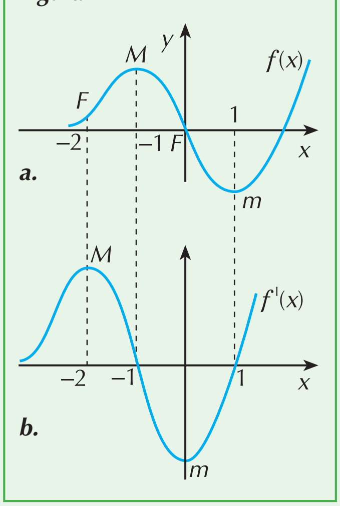
- Quando la funzione $f(x)$ è crescente, allora la funzione derivata è positiva; quando $f(x)$ è decrescente, allora la funzione derivata è negativa; quando la funzione ha un punto a tangente orizzontale, allora la funzione derivata si annulla, cioè taglia l'asse delle ascisse.
- Tenendo poi presente che $f''(x)$ è la derivata di $f'(x)$, possiamo dire che quando la funzione $f(x)$ ha la concavità verso l'alto (cioè $f''(x) > 0$), allora la funzione derivata prima è crescente; quando la funzione $f(x)$ ha la concavità verso il basso (cioè $f''(x) < 0$), allora la funzione derivata prima è decrescente; quando infine $f(x)$ ha un punto di flesso (cioè $f''(x) = 0$), allora la funzione derivata ha un punto a tangente orizzontale.
- Inoltre si può dimostrare che se una funzione $f(x)$ è pari (cioè presenta una simmetria rispetto all'asse y), allora la funzione derivata è dispari (cioè è simmetrica rispetto all'origine); mentre se una funzione $f(x)$ è dispari, allora la funzione derivata è pari.

Tenendo presenti queste considerazioni, costruiamo il grafico della derivata della funzione $f(x)$ il cui grafico è in ***figura 1a***:

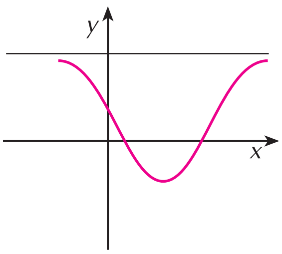
- la funzione $f(x)$ ha un punto di massimo per $x = -1$ ed un punto di minimo per $x = 1$, allora la funzione $f'(x)$ taglia l'asse delle ascisse in tali punti;
- la funzione $f(x)$ ha un punto di flesso in $x = -2$ e nell'origine, quindi la funzione $f'(x)$ ha in tali punti la tangente orizzontale;
- la funzione $f(x)$ è crescente per $x < -1$ e per $x > 1$, quindi in tali intervalli la funzione $f'(x)$ è positiva; la funzione $f(x)$ è decrescente per $-1 < x < 1$, quindi in tale intervallo la funzione derivata è negativa;
- la funzione $f(x)$ ha la concavità verso l'alto per $x < -2$ e per $x > 0$, quindi la funzione derivata è crescente in tali intervalli; la funzione $f(x)$ ha la concavità verso il basso per $-2 < x < 0$, quindi la funzione $f'(x)$ è decrescente in tali intervalli;
- inoltre, poiché non vi sono altri punti in cui $f'(x)$ taglia l'asse delle ascisse, la funzione derivata dovrà avere un flesso in un punto di ascissa k minore di -2.

In base a tutte queste considerazioni, possiamo dire che il grafico della funzione derivata è in ***figura 1b***.

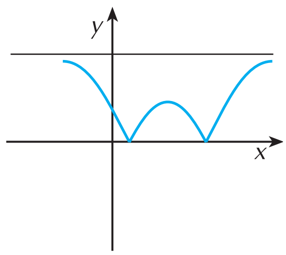
Figura 1



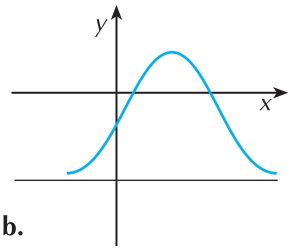
1 Supposto che il grafico di una funzione $f(x)$ sia quello in rosso, trova a quale, fra gli altri grafici, corrisponde quello di $f(|x|)$.



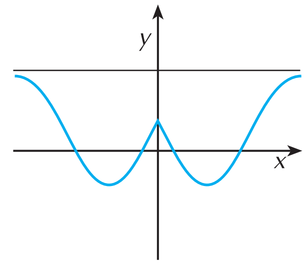
a.



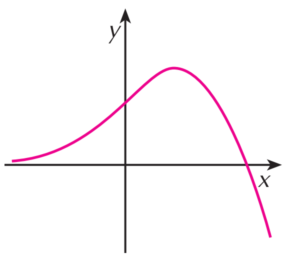
b.



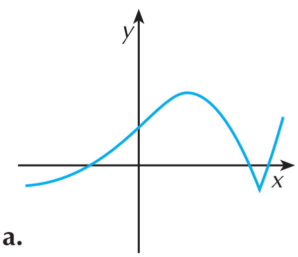
c.



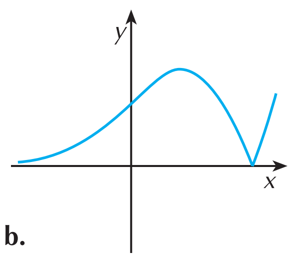
2 Supposto che il grafico di una funzione $f(x)$ sia quello in rosso, trova a quale, fra gli altri grafici, corrisponde quello di $|f(x)| - 1$.



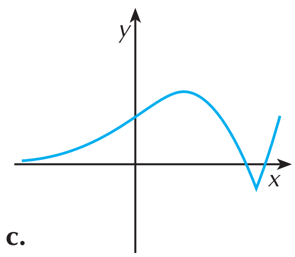
a.



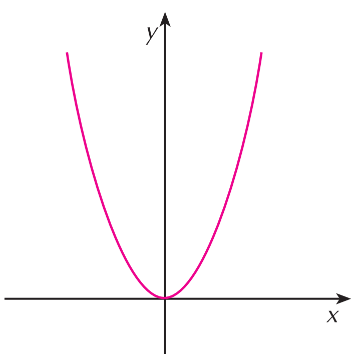
b.



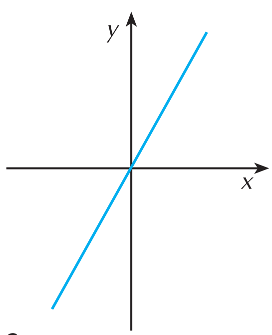
c.



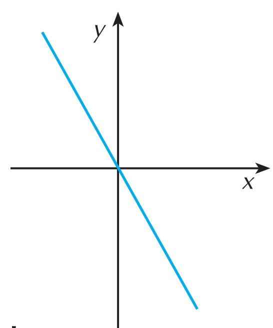
3 Data la funzione il cui grafico è rappresentato in colore rosso, individua quale fra i grafici in colore blu può rappresentare quello della sua derivata.



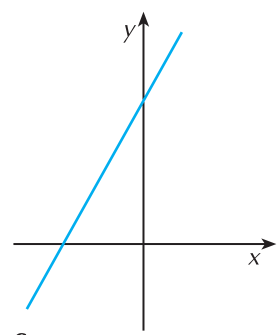
a.



b.



c.



Dopo aver tracciato il grafico della funzione $f(x)$ assegnata, costruisci quelli delle funzioni indicate che da essa si deducono.

4 $f(x) = x^3 + x$ costruisci il grafico di $-f(x)$ $f(-x)$

5 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4}$ costruisci il grafico di $f(x) - 2$ $|f(x)|$

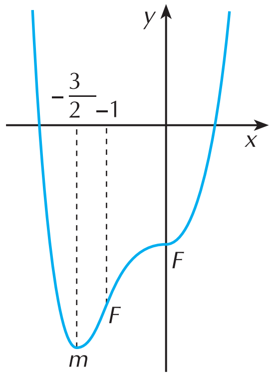
6 $f(x) = x^3 - 2x$ costruisci il grafico di $|f(x)| + 1$ $-|f(x)|$

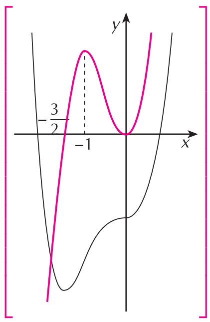
7 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ costruisci il grafico di $|f(x+1)|$ $f(x-1)$

8	$f(x) = x^3 - 3x$	costruisci il grafico di	$-\lvert f(x) \rvert$	$f(x+1)$
9	$f(x) = x^2 - x - 2$	costruisci il grafico di	$f(x-2)$	$f(-x)$
10	$f(x) = \sin x$	costruisci il grafico di	$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
11	$f(x) = \cos x$	costruisci il grafico di	$\lvert f(x) \rvert$	$2f(x)$
12	$f(x) = x^3 + x$	costruisci il grafico di	$f(-x)$	$\frac{1}{2}\lvert f(x) \rvert$
13	$f(x) = x^2 + 1$	costruisci il grafico di	$f(\lvert x \rvert)$	$2\, f(\lvert x \rvert)$

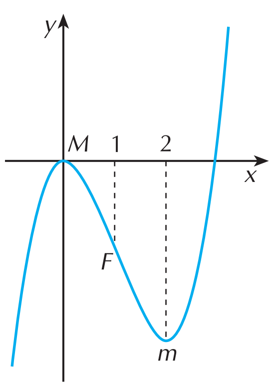
Dati i grafici delle funzioni $f(x)$ nelle seguenti figure, costruisci quelli delle funzioni $f'(x)$.

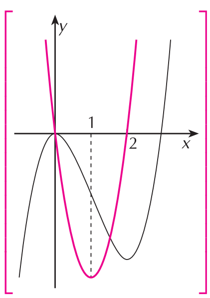
14



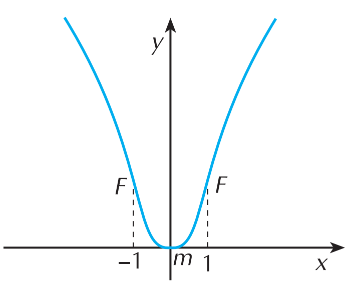


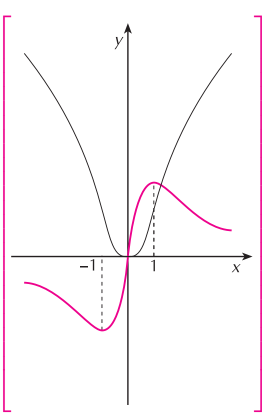
15



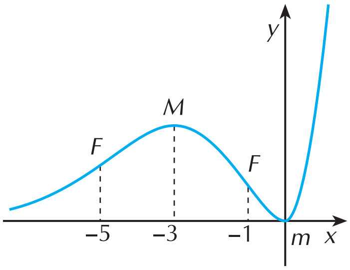


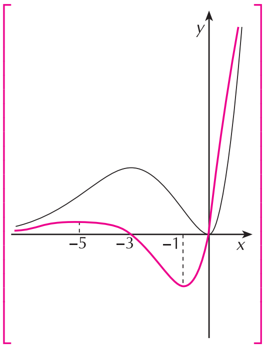
16



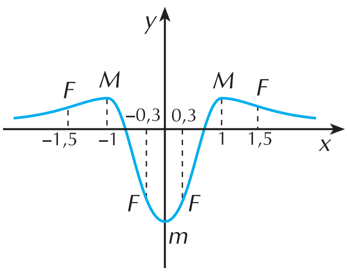


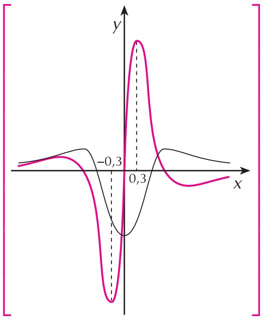
17


y
M
F
F
−5
−3
−1
m
x

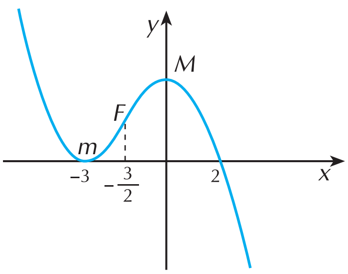

y
−5
−3
−1
x

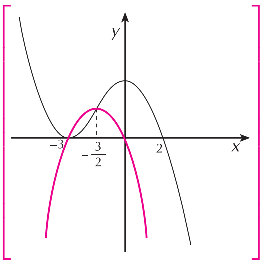
18


y
F
M
M
F
−0,3
0,3
−1,5
−1
1
1,5
x
F
F
m


y
−0,3
0,3
x

19


y
M
F
m
−3
$-\frac{3}{2}$
2
x


y
−3
$-\frac{3}{2}$
2
x