

Le applicazioni alla risoluzione dei problemi

Le curve che abbiamo imparato a conoscere in questo capitolo ci possono aiutare a risolvere problemi di natura più concreta e legati alla vita quotidiana. A tal proposito consideriamo il seguente esempio.

Un ricco signore ha decretato che alla sua morte i suoi beni, che ammontano a otto milioni di Euro, debbano essere divisi fra l'unico nipote ed un'associazione benefica. Egli è però una persona che ama i giochi matematici; inoltre non ha molta fiducia nelle capacità del nipote di gestire il denaro. Stabilisce quindi che le cifre che i due eredi avranno dovranno essere tali da rendere minima, cioè il più piccola possibile, la somma fra il quadrato della parte destinata al nipote ed il doppio di quella destinata all'associazione. Qual è la somma destinata al nipote?

Se indichiamo con x la parte in milioni di Euro che avrà il nipote, possiamo indicare con $8 - x$ quella che avrà l'associazione; quindi la somma di cui cerchiamo il valore minimo è

$$x^2 + 2(8 - x) \quad \text{cioè svolgendo i calcoli} \quad x^2 - 2x + 16$$

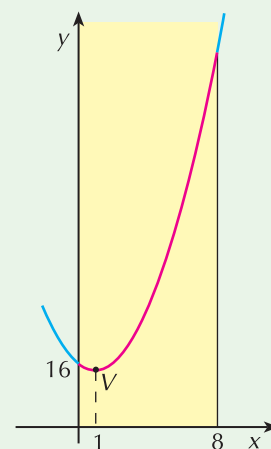
Se indichiamo con y tale espressione, il problema è ricondotto al calcolo del valore di x in corrispondenza del quale è minimo quello di y . Consideriamo allora la funzione

$$y = x^2 - 2x + 16 \quad \text{soggetta ai vincoli} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 8 \end{cases}$$

il cui grafico corrisponde ad una parabola (**figura 1**) che ha la concavità rivolta verso l'alto. Il punto che, appartenendo ad essa e soddisfacendo i vincoli, ha l'ordinata minore di tutti gli altri punti della curva è il vertice, cioè il punto di ascissa 1. Quindi $x = 1$ e $8 - x = 7$.

Il nipote avrà in eredità 1 milione di Euro, mentre l'associazione benefica ne avrà 7.

Figura 1



ESERCIZI

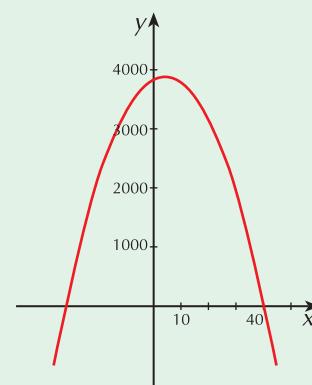
1 ESERCIZIO GUIDATO

Un floricoltore ha piantato in un piccolo appezzamento di terreno 32 piante di rose che danno ciascuna circa 120 fiori nell'arco della stagione di fioritura. Decide di piantare un ulteriore numero x di rose nello stesso terreno; così però ciascuna pianta, comprese quelle già piantate, darà un numero inferiore di fiori, circa $120 - 3x$ a stagione. Quante rose deve piantare ancora per avere la massima produzione di fiori possibile?

Il numero complessivo di rose è $32 + x$

Se ciascuna pianta produce $120 - 3x$ fiori, il numero complessivo di fiori prodotti è pari a

$$(32 + x)(120 - 3x) \quad \text{cioè} \quad -3x^2 + 24x + 3840$$



Se indichiamo tale numero con y otteniamo la parabola di equazione

$$y = -3x^2 + 24x + 3840 \quad \text{il cui grafico è in figura.}$$

Il massimo numero di rose che si possono produrre è il valore di y in corrispondenza del vertice V della parabola:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{-6} = 4 \quad y_V = -3 \cdot 16 + 24 \cdot 4 + 3840 = 3888$$

Il fioricoltore deve piantare altre 4 piante ed avrà la massima produzione di 3888 rose a stagione.

2 Due numeri naturali hanno per somma 50; quali sono i due numeri se il loro prodotto deve essere il più grande possibile? [25, 25]

3 Dividi il numero 20 in due parti, tali che la somma fra il quadrato della prima ed il doppio della seconda, sia minima. [1, 19]

4 Alberto partecipa ad un gioco televisivo basato sull'abilità di calcolo dei concorrenti. Il conduttore gli offre di scegliere fra due possibilità: o accettare una busta con € 1000 oppure la somma che si ottiene in corrispondenza del massimo della funzione $y = -\frac{17}{20}x^2 - 17x + 580$. Che cosa sceglierà Alberto? [la prima]

5 Un'industria tessile produce x metri di spugna bianca con cui si confezionano asciugamani per comunità. Quanti metri di spugna si devono produrre per minimizzare il costo di ciascun asciugamano se questo è dato, in millesimi di Euro, dall'espressione $\frac{2}{81000}x^2 - \frac{4}{9}x + 3000$? [$x = 9000m$]

6 Una azienda produce x capi in pelle su ordinazione con i seguenti costi espressi in Euro:

- € 30 di gestione dei macchinari
- $500 - \frac{1}{20}x$ per ogni capo prodotto
- € 20 di spese pubblicitarie e di gestione delle vendite.

Il ricavo in Euro, per ogni unità prodotta e venduta, è espresso dalla relazione $800 - \frac{8}{100}x$.

L'azienda non può produrre più di 9000 capi all'anno. Quale deve essere la produzione per massimizzare i guadagni? [$x = 5000$]

7 Il costo totale relativo alla produzione di un certo bene si può esprimere mediante la funzione $C = 0,15q^2 + 210q + 3000$, dove q indica la quantità prodotta. Il prezzo unitario di vendita di tale bene dipende da q ed è espresso dalla relazione $p = 660 - 0,3q$. Determina la quantità da produrre per avere il massimo profitto. [500]

8 L'efficacia di un farmaco diminuisce nel tempo secondo la legge $y = \frac{12}{t}$ dove il tempo t viene misurato in ore. Il paziente dovrebbe assumere una dose del farmaco quando l'efficacia scende al di sotto del valore 1,5. Sul foglietto che accompagna il medicinale, quale deve essere il tempo consigliato tra una somministrazione e l'altra? Rappresenta graficamente la soluzione del problema. [una dose ogni 8 ore]