APPROFONDIMENTO

Problemi parametrici

La risoluzione di un problema può portare a scrivere un'equazione che contiene un parametro e in questo caso, come abbiamo già visto nel capitolo sulle equazioni, non si vuole conoscere *la* soluzione, piuttosto *quante* soluzioni ammette il problema al variare del parametro. Vediamo un esempio.

Esempio

In una circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo ABC nel quale la corda AB è lunga come il lato del triangolo equilatero inscritto. Posto $\widehat{CAB} = x$, determiniamo l'ampiezza degli angoli del triangolo in modo che il suo perimetro sia uguale a $kr\sqrt{3}$, essendo k un numero reale positivo.

Con riferimento alla ***figura 1a***, si ha che:

- $\overline{AB} = r\sqrt{3}$
- $\widehat{ACB} = 60°$
- $\widehat{CBA} = 180° - 60° - x = 120° - x$

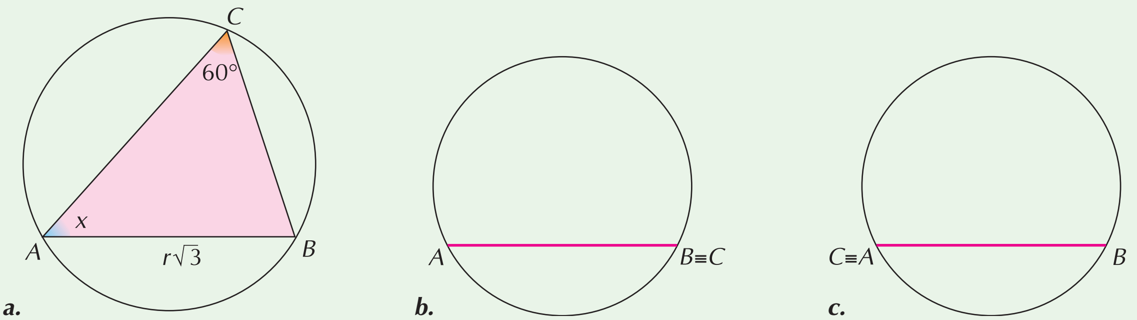
L'incognita x è poi soggetta alla limitazione $0° < x < 120°$.

Casi limite: se $x = 0°$ oppure se $x = 120°$, il triangolo degenera nella corda AB (***figura 1b*** e ***1c***) che, nel calcolo del perimetro, deve essere contata due volte; l'equazione diventa quindi

$$2r\sqrt{3} = kr\sqrt{3} \qquad \text{da cui ricaviamo che} \qquad k = 2.$$

Possiamo quindi accettare i casi limite e dire che $0° \leq x \leq 120°$.

Figura 1



Troviamo adesso le misure dei lati BC e AC; applicando il teorema della corda si ha che:

$$\overline{BC} = 2r \sin x \qquad \text{e} \qquad \overline{AC} = 2r \sin (120° - x)$$

Il perimetro del triangolo è quindi $r\sqrt{3} + 2r \sin x + 2r \sin (120° - x)$

cioè, svolgendo i calcoli, $3r \sin x + \sqrt{3}r \cos x + \sqrt{3}r$

Dobbiamo quindi discutere l'equazione $3r \sin x + \sqrt{3}r \cos x + \sqrt{3}r = kr\sqrt{3}$

che, dividendo per $\sqrt{3}r$, possiamo scrivere nella forma $\sqrt{3} \sin x + \cos x + 1 = k$.

Si tratta di un'equazione lineare che, ponendo $\cos x = X$ e $\sin x = Y$, e tenendo conto delle limitazioni per x, dà luogo al seguente sistema

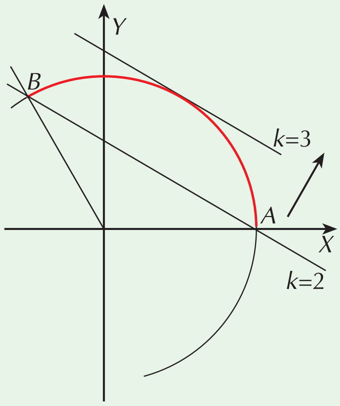
$$\begin{cases} \sqrt{3}Y + X + 1 = k \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leq X \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq Y \leq 1 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi valutare le intersezioni della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 con il fascio di rette parallele $Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}X + \dfrac{(k-1)\sqrt{3}}{3}$ di coefficiente angolare $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (angolo di inclinazione $-30°$); riferendoci alla ***figura 2***, abbiamo che:

- la retta che passa per $A(1, 0)$ passa anche per $B\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e si ottiene per $k = 2$ (abbiamo ritrovato il valore ottenuto nello studio dei casi limite)
- la retta tangente si ottiene per $k = 3$.

Abbiamo quindi sempre due soluzioni per $2 \leq k \leq 3$.

Figura 2



ESERCIZI

1 Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, siano AC e AD due corde tali che AD sia la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$. Determina l'ampiezza dell'angolo $C\widehat{A}B = 2x$ in modo che il perimetro del quadrilatero $ACDB$ sia uguale a $4kr$.

$\left[1 \leq k < \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} : \text{una soluzione; } \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \leq k \leq \dfrac{5}{4} : \text{due soluzioni}\right]$

2 Dal punto A di una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ conduci la corda AC tale che $C\widehat{A}B = 30°$ e la corda AD tale che $D\widehat{A}B = x$, con $D\widehat{A}B > C\widehat{A}B$; la perpendicolare DE condotta da D al diametro incontra AC in F. Discuti al variare di x la relazione $\overline{DE} + \overline{FE} = k\overline{AF}$. Per quali valori di x il quadrilatero $ABCD$ è un trapezio isoscele?

$\left[k \geq 1 : \text{una soluzione; } x = \dfrac{\pi}{3}\right]$

3 E' data una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$; traccia la retta t tangente alla semicirconferenza in A, una corda AC e la bisettrice dell'angolo formato dalla tangente e da AC; siano poi D il punto in cui la bisettrice incontra la semicirconferenza e P la proiezione di D su t.

a. Discuti, al variare del parametro k il numero di soluzioni dell'equazione $\overline{CD} + \overline{DP} = k\overline{AB}$.

b. Tracciata da B la parallela al raggio OC che interseca in Q la retta AC, discuti la relazione $\overline{CB} + \overline{AQ} = k\overline{BQ}$.

(Suggerimento: **b.** osserva che i triangoli AOC e ABQ sono simili ed isosceli e che il rapporto di similitudine è $\dfrac{1}{2}$)

$\left[\textbf{a. } 0 \leq k \leq \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} : \text{una soluzione; } \textbf{b. } 1 \leq k < 2 : \text{una soluzione; } 2 \leq k \leq \sqrt{5} : \text{due soluzioni}\right]$

4 Nel triangolo isoscele acutangolo ABC di base AC si ha che $\overline{AB} = \ell$; tracciate le tre altezze AD, BE, CF, determina l'ampiezza $2x$ dell'angolo di vertice B in modo che sia $\overline{BD} + \overline{BE} + \overline{BF} = k\overline{AB}$.

$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} < k \leq 3 : \text{una soluzione}\right]$

5 Due circonferenze Γ e Γ' rispettivamente di centri O e O' e raggi r e r' sono tangenti esternamente in P e si sa che $\overline{OO'} = \frac{4}{3}r$; una retta s per P incontra la circonferenza Γ in Q e la perpendicolare in O' alla retta OO' in N. Determina l'ampiezza x dell'angolo formato dalla retta s e da OO' in modo che sia verificata la relazione $\overline{PQ} + 3\overline{PN} = kr$.
Successivamente, detti H ed H' le proiezioni dei centri O e O' sulla retta s, indica in quale trasformazione si corrispondono i segmenti OH e $O'H'$.

$\left[2\sqrt{2} \leq k \leq 3 : \text{due soluzioni; } k > 3 : \text{una soluzione; omotetia di centro } P \text{ e rapporto } -\frac{1}{3}\right]$

6 Un triangolo ABC avente il lato AB che misura $r\sqrt{2}$ è inscritto in una circonferenza di raggio r. Determina l'ampiezza degli angoli del triangolo in modo che il suo perimetro sia uguale a $\frac{1}{2}r\left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$. Successivamente, determina un punto P sul minore dei due archi BC in modo che sia $\overline{CP} + \overline{PB} = \frac{\sqrt{2}}{2}k\overline{PA}$.

$[\widehat{A} = 60°;\ \widehat{B} = 75°;\ \widehat{C} = 45°;\ 3 - \sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3} : \text{una soluzione}]$

7 La corda AB di una circonferenza di raggio r misura $\sqrt{3}r$. Determina un punto C sul minore dei due archi AB in modo che, condotta da A la corda AD perpendicolare ad AC, il perimetro del quadrilatero convesso $ACBD$ sia uguale a $\left(3 + \sqrt{3}\right)kr$.

$\left[1 \leq k \leq \frac{2}{3}\sqrt{3} : \text{due soluzioni}\right]$

8 In una circonferenza di centro O e raggio r, la corda AB è il lato del triangolo equilatero inscritto. Traccia dal punto A le corde AC e AD in modo che AB sia bisettrice dell'angolo $\widehat{CAD}$. Determina l'ampiezza dell'angolo $\widehat{CAB}$ in modo che l'area del quadrilatero $ACBD$ sia uguale a $\frac{3}{2}kr^2$.

$\left[0 < k < \frac{\sqrt{3}}{2} : \text{una soluzione; } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq 1 : \text{due soluzioni}\right]$

9 Siano P un punto di una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, PH la perpendicolare condotta da P al diametro e OC il raggio perpendicolare ad AB; congiunto P con O, traccia da P la semiretta t che interseca OC in T in modo che PO sia la bisettrice dell'angolo $\widehat{HPT}$. Determina la posizione del punto P in modo che sia verificata la relazione $\overline{PH} = 2k\overline{TO}$.

$\left[\frac{1}{4} \leq k \leq 1 : \text{due soluzioni simmetriche}\right]$

10 Considerata la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, sia P un punto posto sul prolungamento del diametro oltre B; tracciata da P la tangente alla semicirconferenza che la incontra in C, discuti, al variare del parametro k, la relazione $\frac{\overline{CP}^2}{\overline{OP}^2} + 1 = \frac{k}{r^2}\text{Area}(\widehat{AOC})$.

$[k > 4 : \text{una soluzione}]$

11 Nella semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, sia P il punto medio del raggio AO; traccia da P una semiretta che forma con AB un angolo x e che incontra la semicirconferenza in C. Dall'estremo A traccia poi la corda AD parallela a PC e sia E la proiezione ortogonale di D su PC.

a. Discuti, al variare del parametro k, il numero di soluzioni dell'equazione $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = kr\overline{PE}$.

b. Determina poi per quale valore di x l'area del trapezio $APDE$ vale $\frac{7}{32}r^2$.

$\left[k > \frac{8}{3} : \text{una soluzione; } \sqrt{\frac{5}{3}} \leq k \leq \frac{8}{3} : \text{due soluzioni; } x = 15°\right]$

12 Del triangolo ABC isoscele di vertice C si sa che $\overline{AC} = a$; traccia l'altezza CH relativa alla base AB, e da H le parallele ai lati obliqui che incontrano AC in N e CB in M. Dopo aver stabilito la natura del quadrilatero $HMCN$ e aver posto $\widehat{ACB} = 2x$:

a. determina il valore di x per il quale Area$(HMCN) = k\,\overline{CB}^2$

b. trova per quale valore di x l'area suddetta è massima.

$\left[0 < k < \frac{1}{4}: \text{due soluzioni; } x = 45°\right]$

13 È dato un triangolo equilatero ABC di lato 2ℓ; sul lato AC ed esternamente al triangolo, costruisci la semicirconferenza di diametro AC. Da un punto P dell'altezza AH traccia la perpendicolare ad AC che incontra AC in Q e la semicirconferenza in R. Posto $C\widehat{A}R = x$, discuti, al variare di P su AH, la relazione $\overline{AR} + \overline{AQ} = k\ell\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PQ}}$.

$\left[0 < k \le \frac{3+2\sqrt{3}}{4}: \text{una soluzione}\right]$

14 In una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, una semiretta s uscente da A incontra in C la semicirconferenza e in D la tangente alla semicirconferenza nel punto B; sia E il punto d'incontro di DB con la tangente alla semicirconferenza nel punto C. Determina l'ampiezza dell'angolo $C\widehat{A}B = x$ in modo che sia verificata la relazione $\overline{CE} + \overline{CD} = \dfrac{1}{2}k\overline{CB}$.

[una soluzione limite $x = 0$ per ogni k; $k > 1$: una soluzione]

15 Assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza $\dfrac{3}{4}\pi$, sia Q un punto dell'arco AB e H e K le proiezioni ortogonali di Q rispettivamente su AO e OB in modo che K e H appartengano ai segmenti AO e OB. Discuti, al variare del parametro k, il numero di soluzioni dell'equazione $\overline{QK}\cdot\overline{QH} = k\overline{OK}\cdot\overline{OH}$.

$[k \ge 3 + 2\sqrt{2}: \text{due soluzioni}]$

16 In una circonferenza di raggio r, traccia la corda AB lunga $r\sqrt{3}$ e la retta t tangente alla circonferenza in B. Preso un punto P nel minore dei due archi AB, indica con H e K le proiezioni di P rispettivamente sulla corda AB e sulla retta t. Discuti al variare del parametro reale k la relazione $\overline{PH} - \overline{PK} = 2kr$. Per quale posizione di P i due segmenti PH e PK risultano uguali?

$\left[-\frac{3}{4} \le k < 0: \text{una soluzione; } 0 \le k \le \frac{2\sqrt{3}-3}{4} \text{ due soluzioni; } PH = PK \text{ con } P \equiv B \text{ e con } P \text{ punto medio dell'arco } AB\right]$

17 Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti internamente in S (O è il centro della circonferenza maggiore). Una semiretta t uscente da S incontra la circonferenza più interna in M' e quella più esterna in M; la perpendicolare a t uscente da S incontra la circonferenza più interna in N' e quella più esterna in N. Sapendo che $\overline{SM} + \overline{SN'} = 8\overline{SO}$ e posto $\overline{OS} = r$, determina l'ampiezza dell'angolo $M\widehat{S}O$ in modo che sia verificata la relazione $\overline{SO'} = k\overline{SO}$.

$[\sqrt{15} \le k \le 4: \text{due soluzioni; } k > 4: \text{una soluzione}]$

18 Data una retta r, prendi su di essa un punto A e da A traccia due semirette s e t fra loro perpendicolari e giacenti nello stesso semipiano rispetto a r. Prendi poi un punto B su s e un punto C su t in modo che sia $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Indicate con M e N le proiezioni di B e C su r, determina l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}M$ in modo che sia verificata la relazione: area $(BCNM) = k\overline{AC}^2$. Stabilisci poi quale deve essere l'ampiezza di tale angolo affinchè l'area richiesta sia massima.

$\left[1 \le k \le \frac{9}{4}: \text{due soluzioni; } x = \frac{\pi}{4}\right]$

19 In una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, considera la corda CD, lato dell'esagono regolare inscritto, e congiungi C con A e D con B in modo da ottenere il quadrilatero convesso $ABDC$. Posto $B\widehat{A}C = x$, discuti, al variare del parametro k, il numero di soluzioni dell'equazione $2p(ABDC) = kr$.

$[\sqrt{3} + 3 \le k \le 5: \text{una soluzione}]$

20 Sul lato AB di un quadrato $ABCD$ di lato ℓ ed esternamente ad esso costruisci la semicirconferenza di diametro AB. Determina un punto P sulla semicirconferenza in modo che sia $\overline{PD}^2 + \overline{PC}^2 = k\left(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2\right)$.

$[3 \le k \le 5: \text{due soluzioni}]$

21 Data una circonferenza di centro O e raggio r, sia t la semiretta ad essa tangente in un suo punto A; considera poi la corda AB tale che l'angolo da essa formato con la semiretta t sia di 30°. Preso un punto C su t, determina l'ampiezza dell'angolo $\widehat{COA}$ in modo che sia verificata la relazione $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = k\overline{AB}^2$.

$\left[\frac{5}{8} \leq k \leq 1 : \text{due soluzioni; } k > 1 : \text{una soluzione}\right]$

22 Siano AB, BC e CD tre corde consecutive di una circonferenza di centro O raggio r, rispettivamente lato del quadrato inscritto, lato dell'esagono inscritto e lato del triangolo equilatero inscritto. Preso sull'arco AD un punto P e posto $\widehat{PBA} = x$, studia il numero di soluzioni dell'equazione $\overline{PD} + \sqrt{2}\,\overline{AP} = k\overline{AD}$ al variare del parametro k.

$\left[1 \leq k \leq \sqrt{2} : \text{una soluzione}\right]$

23 In una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$ considera la corda CD perpendicolare ad AB ed uguale al lato del triangolo equilatero inscritto e indica con H la sua intersezione con AB (con $AH < HB$). Preso un punto P sul prolungamento di AB, dalla parte di B e posto $\widehat{CPA} = x$, discuti, al variare del parametro k la numerosità delle soluzioni dell'equazione $\overline{CP} + \overline{HP} = k\overline{CD}$.

$\left[k \geq \frac{2+\sqrt{3}}{2} : \text{una soluzione}\right]$