Concetti chiave e regole

Il rapporto incrementale

Il **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h è dato dall'espressione:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata

Se il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale esiste finito, si dice che $f(x)$ è derivabile nel punto x_0; in tal caso l'espressione:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

rappresenta la **derivata** di $f(x)$ in x_0.
Quando il limite non è finito oppure non esiste, si dice che $f(x)$ non è derivabile in x_0.
Una funzione non derivabile in x_0 può però essere derivabile da sinistra o da destra di tale punto a seconda che esista finito il limite per $h \to 0^-$ oppure per $h \to 0^+$ del rapporto incrementale.

Le regole di derivazione

Per calcolare la derivata di una funzione si devono conoscere le regole di derivazione delle funzioni elementari:

$D[k] = 0$ $\quad$ $D[x^\alpha] = \alpha x^{\alpha - 1}$ $\quad$ $D[\sin x] = \cos x$ $\quad$ $D[\cos x] = -\sin x$

$D[\log_a x] = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\quad$ $D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $D[a^x] = a^x \ln a$ $\quad$ $D[e^x] = e^x$

ed i seguenti teoremi:

- derivata della somma: $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- derivata del prodotto: $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
  in particolare $D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$ con $k \in R$
- derivata del quoziente: $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
  in particolare $D\left[\dfrac{1}{g(x)}\right] = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$
- derivata della funzione composta: $D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Dalla regola di derivazione delle funzioni inverse si ha poi che:

- $D[\arcsin x] = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $D[\arccos x] = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $D[\arctan x] = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Il significato geometrico

Dal punto di vista geometrico $f'(x_0)$, cioè la derivata calcolata nel punto x_0, rappresenta il coefficiente angolare della retta t tangente alla curva in quel punto. Se la funzione è derivabile, l'equazione della retta tangente in $P(x_0, f(x_0))$ è quindi:

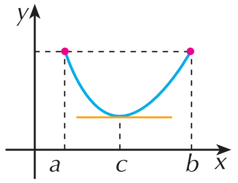
$$y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{m} \cdot (x - x_0)$$

Quando la funzione non è derivabile, si possono presentare i seguenti casi particolari:

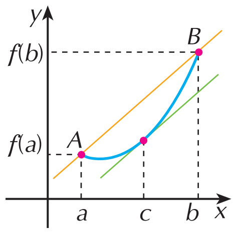
- la derivata sinistra e quella destra sono finite ma diverse, oppure una di esse è finita e l'altra è infinita; in questo caso esistono due rette tangenti diverse a sinistra e a destra di x_0 e P rappresenta un **punto angoloso**
- la derivata sinistra e quella destra sono infinite ma di segno opposto; in questo caso la retta tangente in P è parallela all'asse y e si dice che P è una **cuspide**
- $f'(x_0) = \infty$ allora la retta tangente è parallela all'asse y (si dice che il punto P è un **flesso a tangente verticale**).

I teoremi sulle funzioni derivabili

Le funzioni $f(x)$ derivabili godono di alcune proprietà che sono riassunte in una serie di teoremi; le ipotesi comuni sono che $f(x)$ deve essere continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b). In questo caso:



- **teorema di Rolle:** se la funzione assume valori uguali agli estremi, cioè se $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto c in (a, b) dove la derivata prima si annulla.



- **teorema di Lagrange:** esiste almeno un punto c in (a, b) in cui $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
- il **teorema di Cauchy** riguarda due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe continue in $[a, b]$ e derivabili al suo interno; richiede inoltre che $g'(x)$ non si annulli mai in (a, b). In queste ipotesi, esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ per il quale vale la relazione
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Il teorema di De L'Hospital e il calcolo dei limiti

Il **teorema di De L'Hospital** si utilizza per calcolare i limiti che si possono ricondurre alle forme di indeterminazione $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe definite in un intorno I di un punto x_0, soddisfano le seguenti ipotesi:

- si annullano entrambe in x_0 oppure i loro limiti per $x \to x_0$ sono entrambi infiniti
- sono derivabili in I eccettuato al più x_0
- $g'(x)$ non si annulla mai in I eccettuato al più x_0
- esiste il limite per $x \to x_0$ del rapporto delle due derivate $f'(x)$ e $g'(x)$

allora il limite del rapporto delle due funzioni è uguale al limite del rapporto delle due derivate:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In pratica, tutte le volte che un limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ e le due funzioni al numeratore e al denominatore sono derivabili, si può calcolare il limite del rapporto fra le due derivate.