Concetti chiave e regole

Le equazioni differenziali e le caratteristiche

Un'**equazione differenziale** è un'equazione che ha come incognita una funzione $y = f(x)$ e nella quale, oltre alla variabile indipendente x, compaiono la funzione stessa e le sue derivate.
Le funzioni $y = f(x)$ che soddisfano un'equazione differenziale costituiscono il suo **integrale generale**. Tali funzioni sono, di solito, in numero infinito; tuttavia, se sono note ulteriori informazioni sulla funzione f, per esempio il passaggio per un punto, si ottiene una sola funzione che costituisce un **integrale particolare** dell'equazione.
Un'equazione differenziale si dice poi:

- del **primo ordine** se ha la forma $F(x, y, y') = 0$, cioè se contiene al massimo la derivata prima della funzione; in questo caso l'integrale generale dipende da una sola costante
- del **secondo ordine** se ha la forma $F(x, y, y', y'') = 0$, cioè se contiene al massimo la derivata seconda della funzione; in questo caso l'integrale generale dipende da due costanti.

Le equazioni del primo ordine

Fra le equazioni differenziali del primo ordine abbiamo considerato quelle:

- **della forma $y' = f(x)$**
  l'integrale generale è una primitiva della funzione $f(x)$: $\quad y = \int f(x)dx + c$
- a **variabili separabili** riconducibili alla forma: $\quad \dfrac{y'}{h(y)} = g(x)$
  l'integrale generale si ottiene calcolando l'integrale dei due membri: $\quad \int \dfrac{y'}{h(y)} dy = \int g(x)dx$
- **lineari omogenee** $y' + p(x)y = 0$
  l'integrale generale è: $\quad y = k \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$
- **lineari non omogenee** $y' + p(x)y = q(x)$
  l'integrale generale ha la forma: $\quad y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} dx + c\right]$

Le equazioni del secondo ordine

Fra le equazioni differenziali del secondo ordine abbiamo considerato quelle:

- **della forma $y'' = f(x)$**
  l'integrale generale si ottiene integrando due volte la funzione
- **lineari omogenee a coefficienti costanti** $\quad y'' + py' + qy = 0$
  considerata l'equazione caratteristica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ e indicato con Δ il suo discriminante, si ha che:
  - se $\Delta > 0$, indicate con λ_1 e λ_2 le soluzioni dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è
    $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
  - se $\Delta = 0$, indicata con λ_1 la soluzione dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è
    $y = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 x)$
  - se $\Delta < 0$, poste uguali a $\alpha \pm i\beta$ le soluzioni dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è
    $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

- **lineari non omogenee a coefficienti costanti** $y'' + py' + qy = r(x)$

  indicato con y_0 un integrale particolare dell'equazione e con y_1 l'integrale generale dell'equazione omogenea ad essa associata, l'integrale generale è $y = y_0 + y_1$

  L'integrale y_0 dipende dalla forma di $r(x)$e si ha che:

– se $r(x)$ è un polinomio di grado n $\rightarrow$ y_0 è un polinomio che ha grado:

n	se $q \neq 0$
$n+1$	se $q = 0 \ \wedge \ p \neq 0$
$n+2$	se $q = 0 \ \wedge \ p = 0$

– se $r(x)$ è del tipo $s(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $\alpha \in R$ e $s(x)$ è un polinomio di grado n :

$y_0 =$

$t(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $t(x)$ polinomio dello stesso grado di $s(x)$
se α non è soluzione dell'equazione caratteristica associata

– $x \cdot t(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $t(x)$ polinomio dello stesso grado di $s(x)$
se α è soluzione dell'equazione caratteristica associata e questa ha soluzioni reali distinte

– $x^2 t(x) e^{\alpha x}$
se α è soluzione dell'equazione caratteristica associata e questa ha soluzioni reali coincidenti

– se $r(x)$ è del tipo $h \sin \beta x + k \cos \beta x$:

$y_0 =$

$a \cos \beta x + b \sin \beta x$ se $i\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica associata

$x(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$ se $i\beta$ è soluzione dell'equazione caratteristica associata