

## I grafici derivati - Funzioni esponenziali

A partire dal grafico della funzione  $y = a^x$  possiamo costruire quello di altre funzioni esponenziali applicando opportune isometrie.

Di seguito vediamo alcuni esempi.

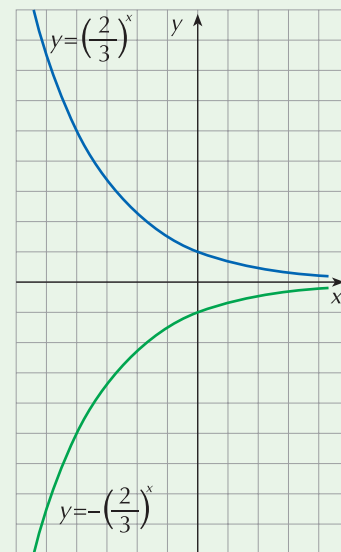
### I esempio

Rappresentiamo il grafico di  $y = -\left(\frac{2}{3}\right)^x$ .

Ricordiamo che la funzione  $y = -f(x)$  è la simmetrica rispetto all'asse  $x$  di  $y = f(x)$ , infatti la prima si ottiene dalla seconda operando le sostituzioni

$$x \rightarrow x \quad \text{e} \quad y \rightarrow -y$$

Disegniamo quindi il grafico di  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  e costruiamo poi il suo simmetrico rispetto all'asse  $x$ .



### II esempio

Costruiamo il grafico di  $y = -3^{-x}$ .

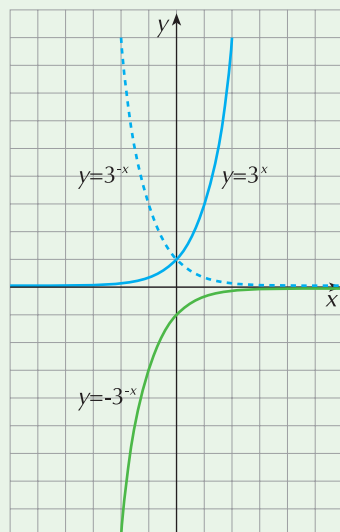
Possiamo ottenere il grafico di questa funzione mediante:

- una prima simmetria rispetto all'asse  $y$  della curva esponenziale  $y = 3^x$  in modo da ottenere il grafico di  $y = 3^{-x}$ , infatti la seconda si ottiene dalla prima operando le sostituzioni

$$x \rightarrow -x \quad \text{e} \quad y \rightarrow y$$

- una seconda simmetria rispetto all'asse  $x$  di  $y = 3^{-x}$  in modo da ottenere il grafico di  $y = -3^{-x}$ .

In pratica, basta tracciare il grafico di  $y = 3^x$  e costruire il suo simmetrico rispetto all'origine.

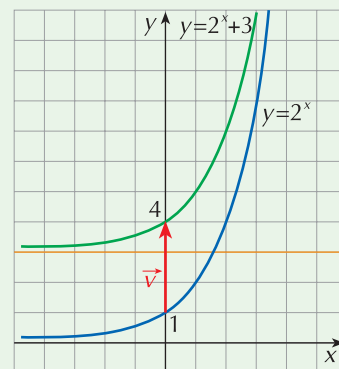


### III esempio

Tracciamo il grafico di  $y = 2^x + 3$ .

Se alla funzione  $y = 2^x$  operiamo le sostituzioni  $x \rightarrow x$   $y \rightarrow y - 3$  otteniamo  $y - 3 = 2^x$  cioè  $y = 2^x + 3$ .

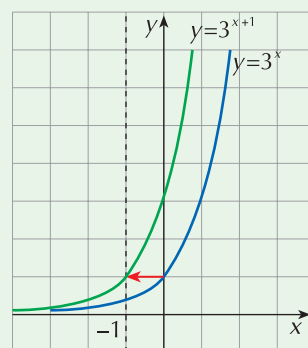
Costruiamo quindi il grafico di  $y = 2^x$  e applichiamo ad esso la traslazione di vettore  $\vec{v} = (0, 3)$ ; l'asintoto di questa funzione è la retta  $y = 3$ .



### IV esempio

Disegniamo il grafico di  $y = 3^{x+1}$ .

Basta tracciare il grafico di  $y = 3^x$  (la base è maggiore di 1) e applicare ad esso la traslazione di vettore  $\vec{v} = (-1, 0)$  cioè operare le sostituzioni  $x \rightarrow x + 1$  e  $y \rightarrow y$ ; l'asintoto è ancora l'asse  $x$ .

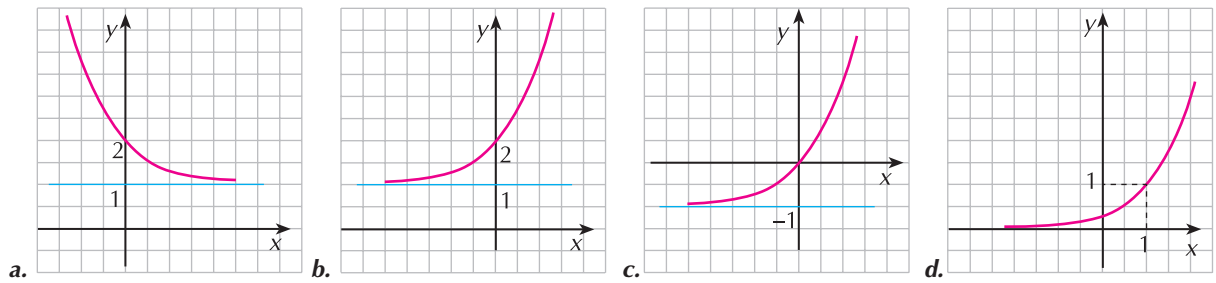


## ESERCIZI

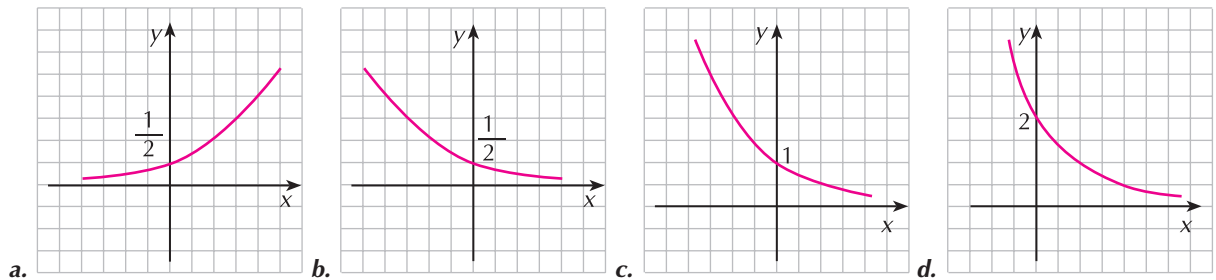
Scegli la risposta giusta.

- 1** In quale delle seguenti trasformazioni la funzione di equazione  $y = 3^{x-2}$  corrisponde alla  $y = 3^x$ ?
  - a. Nella traslazione di vettore  $\vec{v} = (0, 2)$ .
  - b. Nella traslazione di vettore  $\vec{v} = (2, 0)$ .
  - c. Nella traslazione di vettore  $\vec{v} = (-2, 0)$ .
  - d. Nella simmetria rispetto all'asse  $x$ .
  
- 2** In quale delle seguenti trasformazioni la funzione di equazione  $y = 2^{x-3} + \frac{3}{4}$  corrisponde alla  $y = 2^x$ ?
  - a. Nella traslazione di vettore  $\vec{v} = \left(-3, \frac{3}{4}\right)$ .
  - b. Nella traslazione di vettore  $\vec{v} = \left(3, \frac{3}{4}\right)$ .
  - c. Nella simmetria rispetto alla retta  $x = 0$ .
  - d. Nella traslazione di vettore  $\vec{v} = \left(3, -\frac{3}{4}\right)$ .

3 Quale tra i seguenti è il grafico della funzione di equazione  $y = 2^x + 1$ ?



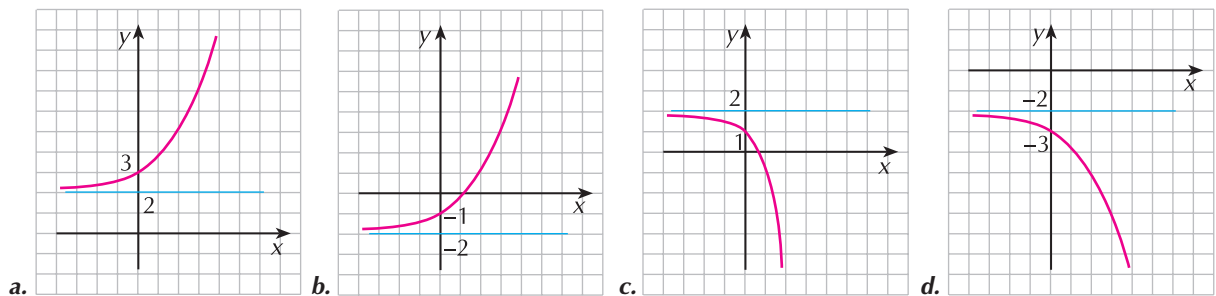
4 Quale tra i seguenti è il grafico della funzione di equazione  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ ?



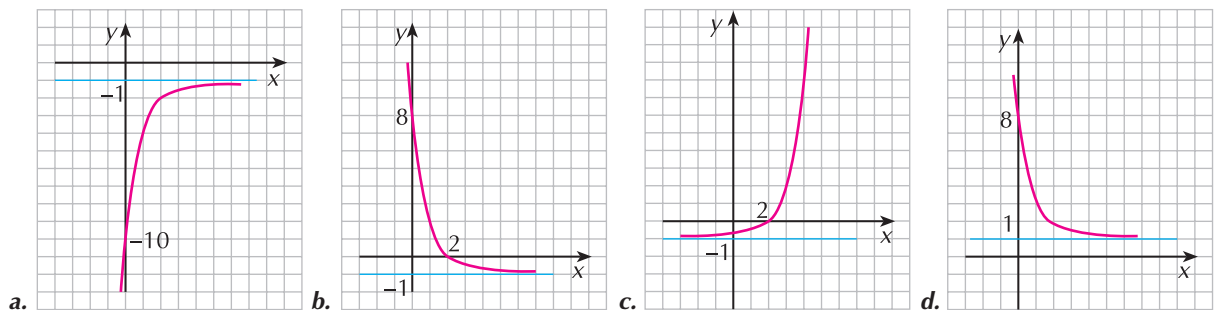
5 In quale tra le seguenti trasformazioni la funzione di equazione  $y = -2^x + 1$  corrisponde alla  $y = 2^x$ ?

- Nell'applicazione successiva della traslazione di vettore  $\vec{v} = (1, 0)$  e della simmetria rispetto all'asse  $x$ .
- Nell'applicazione successiva della traslazione di vettore  $\vec{v} = (0, 1)$  e della simmetria rispetto all'asse  $x$ .
- Nell'applicazione successiva della traslazione di vettore  $\vec{v} = (0, -1)$  e della simmetria rispetto all'asse  $x$ .
- Nell'applicazione successiva della traslazione di vettore  $\vec{v} = (0, -1)$  e della simmetria rispetto all'asse  $y$ .

6 Quale tra i seguenti è il grafico della funzione di equazione  $y = -3^x + 2$ ?

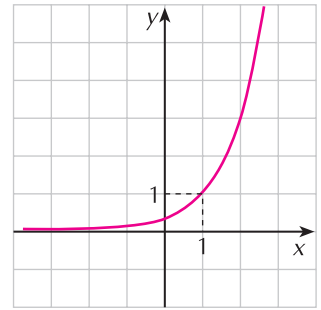


7 Quale tra i seguenti è il grafico della funzione di equazione  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 1$ ?



8 Quale fra le seguenti è l'equazione della funzione il cui grafico è in figura?

- a.  $y = 3^{x+1}$
- b.  $y = 3^{x-1}$
- c.  $y = 3^x + 1$
- d.  $y = 3^x - 1$



Ciascuna delle seguenti funzioni è la trasformata di quella scritta a fianco in una traslazione di vettore  $\vec{v}$ ; individua le componenti del vettore.

## 9 ESERCIZIO GUIDATO

$$y = 3^{x+1} - 5 \quad y = 3^x$$

La funzione data, che si può scrivere nella forma  $y + 5 = 3^{x+1}$ , è associata alla  $y = 3^x$  nella traslazione di vettore  $\vec{v} = (-1, -5)$ .

Le equazioni della trasformazione sono quindi:  $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 5 \end{cases}$  o anche  $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 5 \end{cases}$

10  $y = 2^{x-1}$        $y = 2^x$

11  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$        $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

12  $y = 3^x + 1$        $y = 3^x$

13  $y = 4^{x+1} - 2$        $y = 4^x$

14  $y = 7^{x+2}$        $y = 7^x$

15  $y = \left(\frac{2}{9}\right)^{x+1} + 9$        $y = \left(\frac{2}{9}\right)^x$

Dopo aver scritto l'equazione della funzione associata a quella data nella traslazione di vettore  $\vec{v}$ , costruiscine il grafico.

## 16 ESERCIZIO GUIDATO

$$y = 5^x \quad \vec{v} = (1, 1)$$

Le equazioni della traslazione sono

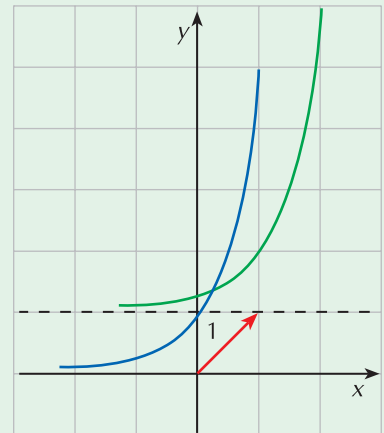
$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Dobbiamo allora operare con le sostituzioni  $\begin{cases} x \rightarrow x - 1 \\ y \rightarrow y - 1 \end{cases}$

L'equazione della funzione corrispondente a quella data è quindi

$$y - 1 = 5^{x-1} \quad \text{cioè} \quad y = 5^{x-1} + 1$$

Per costruire il grafico disegniamo la funzione  $y = 5^x$  (in blu nella figura) ed operiamo su di essa con la traslazione del vettore  $\vec{v}$  assegnato (in verde nella stessa figura).



$$17 \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad \vec{v} = (1, -1)$$

$$18 \quad y = (2,5)^x \quad \vec{v} = (-1, 1)$$

$$19 \quad y = \left(\frac{5}{2}\right)^x \quad \vec{v} = (0, 1)$$

$$20 \quad y = 3^{-x} \quad \vec{v} = (1, 0)$$

$$21 \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$22 \quad y = \left(\frac{4}{7}\right)^x \quad \vec{v} = (-2, -1)$$

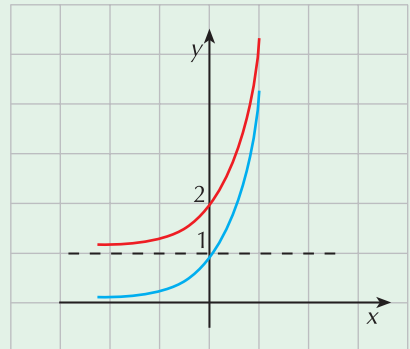
Costruisci il grafico delle seguenti funzioni.

### 23 ESERCIZIO GUIDATO

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} + 1$$

L'equazione data può essere riscritta nella forma  $y = 4^x + 1$

La funzione base è  $y = 4^x$  (in blu); ad essa dobbiamo applicare la traslazione di vettore  $\vec{v} = (0, 1)$ . L'asintoto orizzontale diventa la retta  $y = 1$ .



$$24 \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 1$$

$$25 \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$

$$26 \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$$

$$27 \quad y = 3^{-x} + 1$$

$$28 \quad y = 3^{x-3} + 1$$

$$29 \quad y = 1 - 5^x$$

$$30 \quad y = 2 \cdot 3^{x-1}$$

$$31 \quad y = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$$

$$32 \quad y = 3^{x+1} - 2$$

$$33 \quad y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$34 \quad y = 2 \cdot 3^x - 1$$

$$35 \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 3$$

$$36 \quad y = 1 + 2^{-x}$$

$$37 \quad y = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

#### Risultati di alcuni esercizi.

1 b.

2 b.

3 b.

4 d.

5 b.

6 c.

7 b.

8 b.

$$10 \quad \vec{v} = (1, 0)$$

$$11 \quad \vec{v} = (0, -1)$$

$$12 \quad \vec{v} = (0, 1)$$

$$13 \quad \vec{v} = (-1, -2)$$

$$14 \quad \vec{v} = (-2, 0)$$

$$15 \quad \vec{v} = (-1, +9)$$

$$17 \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - 1$$

$$18 \quad y = (2,5)^{x+1} + 1$$

$$19 \quad y = \left(\frac{5}{2}\right)^x + 1$$

$$20 \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

$$21 \quad y = 4^{x-\frac{1}{2}} - 2$$

$$22 \quad y = \left(\frac{4}{7}\right)^{x+2} - 1$$