Le condizioni per individuare un'isometria

Ci chiediamo adesso: quanti punti occorrono perché un'isometria sia completamente individuata? Facciamo delle prove. Una sola coppia di punti non è sufficiente: i punti A ed A' potrebbero corrispondersi in una simmetria assiale (***figura 1a***), in una simmetria centrale (***figura 1b***), in una traslazione (***figura 1c***) o anche in una rotazione (***figura 1d***).

Figura 1

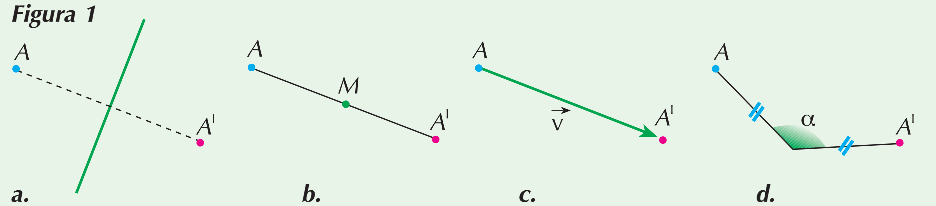
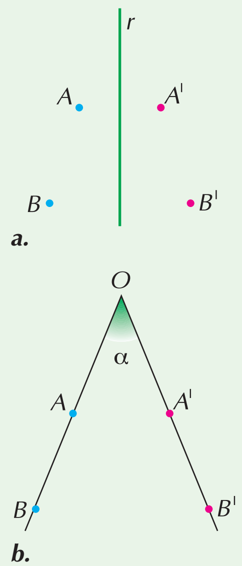


Figura 2

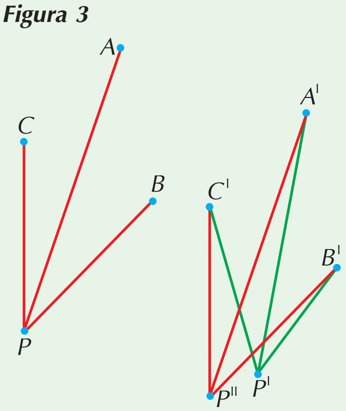


Due coppie di punti saranno sufficienti? La risposta è ancora no; i punti A e A', B e B' in ***figura 2*** potrebbero corrispondersi in una simmetria assiale o anche in una rotazione.

Tre punti (ovviamente non allineati) saranno sufficienti? Per rispondere a questa domanda ragioniamo in questo modo:

- prendiamo tre punti A, B, C non allineati e i loro corrispondenti A', B', C' nell'isometria f (anche A', B', C' non sono allineati per le proprietà delle isometrie)
- nella f ogni punto P del piano di A, B, C deve avere il suo corrispondente P'
- supponiamo che ci sia una seconda isometria g che trasforma A, B, C in A', B', C' ma che trasforma P in un punto P'' diverso da P'.

Figura 3



Se facciamo vedere che questo è impossibile, allora si può concludere che esiste una sola trasformazione che muta A, B, C in A', B', C'.
Con riferimento alla ***figura 3*** osserviamo che:

- $A'P' \cong AP$ perché corrispondenti nell'isometria f, $A'P'' \cong AP$ perché corrispondenti nell'isometria g, quindi, per la proprietà transitiva della congruenza, anche $A'P' \cong A'P''$; questo significa che il punto A' appartiene all'asse del segmento $P'P''$.

Analogamente:

- $BP \cong B'P'$ e $BP \cong B'P''$, quindi $B'P' \cong B'P''$; di conseguenza il punto B' appartiene all'asse del segmento $P'P''$
- $CP \cong C'P'$ e $CP \cong C'P''$, quindi $C'P' \cong C'P''$; di conseguenza il punto C' appartiene all'asse del segmento $P'P''$.

I tre punti A', B' e C' appartengono quindi tutti all'asse del segmento $P'P''$ e perciò sono allineati, contro l'ipotesi iniziale. Siamo quindi giunti ad un assurdo e possiamo concludere che:

un'isometria è univocamente determinata dalla trasformazione di tre punti non allineati.