

APPROFONDIMENTO

Relazioni tra coefficienti e soluzioni

Riprendiamo l'analisi che abbiamo fatto in questo paragrafo per riconoscere se un sistema è determinato, indeterminato, impossibile.

Il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ è determinato se $\Delta = ae - bd \neq 0$.

Possiamo riscrivere questa condizione in un altro modo: $ae \neq bd \rightarrow \frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$

Dunque il sistema è determinato se $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$.

Sappiamo poi che il sistema è indeterminato se, essendo $\Delta = 0$, anche $\Delta x = 0 \wedge \Delta y = 0$, cioè $ce - bf = 0 \wedge af - cd = 0$.

Riscriviamo queste due condizioni in altro modo: $ce = bf \rightarrow \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

$$af = cd \rightarrow \frac{a}{d} = \frac{c}{f}$$

Dunque il sistema è indeterminato se $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

Il sistema è invece impossibile se, essendo $\Delta = 0$, si verifica che $\Delta x \neq 0 \vee \Delta y \neq 0$, cioè $ce - bf \neq 0 \vee af - cd \neq 0$.

Riscriviamo in altro modo: $ce \neq bf \rightarrow \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$

$$af \neq cd \rightarrow \frac{a}{d} \neq \frac{c}{f}$$

Dunque il sistema è impossibile se $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ ma questi due rapporti sono diversi da $\frac{c}{f}$.

In definitiva, supposto che tutti i rapporti precedenti esistano, possiamo affermare che:

il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

- è **determinato** se $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \leftarrow$ rapporto fra i coefficienti di x diverso dal rapporto fra i coefficienti di y
- è **indeterminato** se $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \leftarrow$ rapporti fra i coefficienti dei termini corrispondenti tutti uguali tra loro
- è **impossibile** se $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f} \leftarrow$ uguali i rapporti tra i coefficienti di x e di y , ma diversi dal rapporto fra i termini noti

Consideriamo per esempio i seguenti sistemi:

$$\bullet \begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases} \rightarrow \frac{a}{d} = \frac{4}{3} \quad \frac{b}{e} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{il sistema è determinato}$$

$$\bullet \begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{a}{d} = \frac{4}{2} = 2 \quad \frac{b}{e} = \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{c}{f} = \frac{8}{1} = 8 \rightarrow \text{il sistema è impossibile}$$

$$\bullet \begin{cases} -8x + 4y = 12 \\ 6x - 3y = -9 \end{cases} \rightarrow \frac{a}{d} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3} \quad \frac{b}{e} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} \quad \frac{c}{f} = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{il sistema è indeterminato}$$

ESERCIZI

Comprensione

1 Senza risolverlo, puoi dire che il sistema $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + \frac{3}{2}y = 9 \end{cases}$ è:

- a. determinato b. indeterminato c. impossibile

2 In base all'analisi dei coefficienti, il sistema $\begin{cases} 2x + 3ky = 4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$:

- a. è determinato se: ① $k \neq 0$ ② $k \neq -\frac{9}{4}$ ③ $k \neq -\frac{4}{9}$
- b. è indeterminato se: ① $k = -\frac{4}{9}$ ② $k = -\frac{8}{9}$ ③ per nessun valore di k
- c. è impossibile se: ① $k = -\frac{4}{9}$ ② $k = -\frac{8}{9}$ ③ per nessun valore di k

3 Completa mettendo un appropriato coefficiente in modo che i seguenti sistemi soddisfino la condizione indicata:

$\begin{cases} 2x - 6y = \dots \\ 4x + \dots y = 2 \end{cases}$ il sistema sia: a. determinato b. indeterminato c. impossibile

$\begin{cases} x - 4y = \dots \\ 3x + \dots y = 5 \end{cases}$ il sistema sia: a. determinato b. indeterminato c. impossibile

Applicazione

Tenendo presenti le relazioni ricordate, stabilisci la natura dei seguenti sistemi senza risolverli.

4 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$ [determinato; impossibile]

5 $\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + y = -10 \\ 6x - 2y = 20 \end{cases}$ [determinato; indeterminato]

6 $\begin{cases} x - 3 = -7y \\ 6 - 14y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 18y + 2 = 0 \\ 5 + 6y = -x \end{cases}$ [indeterminato; impossibile]

7 $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 6y = 1 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ [determinato; impossibile]

Dopo aver stabilito la natura dei seguenti sistemi, trova la soluzione di quelli determinati.

8 $\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 4x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$ $\left[S = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, 0 \right) \right\}; \text{indeterminato} \right]$

9 $\begin{cases} -x + y + 4 = 0 \\ 3x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 5y - 6 = 0 \\ -3x - 15y - 18 = 0 \end{cases}$ [indeterminato; impossibile]

$$10 \quad \begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -5x + 2y + 50 = 0 \\ -5x + 3y + 15 = 0 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ \left(\frac{8}{7}, -\frac{10}{7} \right) \right\}; S = \{(24, 35)\} \right]$$

$$11 \quad \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{6} = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + \frac{1}{4}y - 1 = 0 \\ -8x + y + 4 = 0 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right) \right\}; \text{impossibile} \right]$$

$$12 \quad \begin{cases} \frac{1}{4}x + 2y + 1 = 0 \\ \frac{1}{8}x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -13x + y - 7 = 0 \\ x - \frac{1}{13}y + \frac{7}{13} = 0 \end{cases} \quad [\text{impossibile; indeterminato}]$$

Stabilisci, senza risolverli, per quale valore del parametro k i seguenti sistemi sono determinati, indeterminati o impossibili.

13 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{cases} kx + (k-1)y = 1 \\ x + 2y = k \end{cases}$$

Il rapporto fra i coefficienti di x è k . Il rapporto fra i coefficienti di y è $\frac{k-1}{2}$

Affinché il sistema sia determinato deve essere: $k \neq \frac{k-1}{2}$ cioè $k \neq -1$

Per $k = -1$, il rapporto fra i coefficienti di x è uguale al rapporto fra i coefficienti di y e vale -1 ; il rapporto fra i termini noti è uguale a -1 , quindi il sistema è indeterminato.

$$14 \quad \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x - y + k - 3 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{se } k = 8 : \text{ sistema indeterminato;} \\ \text{se } k \neq 8 : \text{ sistema impossibile} \end{array} \right]$$

$$15 \quad \begin{cases} 2x - ky + 6 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{se } k \neq -2 : \text{ determinato;} \\ \text{se } k = -2 : \text{ impossibile} \end{array} \right]$$

$$16 \quad \begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ kx - (k+1)y + 2 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{se } k = -\frac{3}{2} : \text{ sistema impossibile;} \\ \text{se } k \neq -\frac{3}{2} : \text{ sistema determinato} \end{array} \right]$$

$$17 \quad \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ (k+1)x - (k+2)y + 1 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{se } k = -\frac{4}{3} : \text{ sistema indeterminato;} \\ \text{se } k \neq -\frac{4}{3} : \text{ sistema determinato} \end{array} \right]$$

$$18 \quad \begin{cases} x - 2ky + 3 = 0 \\ (k+1)x - (k+3)y - 1 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{se } k = 1 \vee k = -\frac{3}{2} : \text{ sistema impossibile;} \\ \text{se } k \neq 1 \wedge k \neq -\frac{3}{2} : \text{ sistema determinato} \end{array} \right]$$