

Concetti chiave e regole

Le funzioni goniometriche inverse

Le funzioni inverse delle goniometriche fondamentali sono:

- $y = \arcsin x$ definita in $[-1, 1]$ con codominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $y = \arccos x$ definita in $[-1, 1]$ con codominio $[0, \pi]$
- $y = \arctan x$ definita in $(-\infty, +\infty)$ con codominio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Equazioni di tipo elementare

In generale, un'equazione goniometrica si può sempre ricondurre alla risoluzione di una o più **equazioni elementari** della forma:

- $\sin x = a$ con $-1 \leq a \leq 1$
- $\cos x = b$ con $-1 \leq b \leq 1$
- $\tan x = c$ con $c \in R$.

Ciascuna di queste equazioni ha infinite soluzioni che differiscono fra loro per il periodo della funzione; tenendo presente l'intervallo di inversione delle funzioni goniometriche e indicando con α l'angolo appartenente a tale intervallo, le soluzioni si possono scrivere nei seguenti modi:

- $\sin x = a$ se $\alpha = \arcsin a$: $x = \alpha + 2k\pi \vee x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$
- $\cos x = b$ se $\alpha = \arccos b$: $x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi$
- $\tan x = c$ se $\alpha = \arctan c$: $x = \alpha + k\pi$

Equazioni lineari

Un'equazione lineare assume la forma: $a \sin x + b \cos x + c = 0$

- Se $c = 0$, e solo in questo caso, si può dividere per $\cos x$ ottenendo l'equazione elementare equivalente: $a \tan x + b = 0$.
- Se $c \neq 0$ si possono seguire diversi metodi:
 - usare le formule parametriche verificando preventivamente se $x = \pi + 2k\pi$ è soluzione dell'equazione
 - utilizzare il metodo del sistema associando all'equazione l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\begin{cases} a \sin x + b \cos x + c = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

- utilizzare il metodo grafico ponendo nel precedente sistema $\sin x = Y$ e $\cos x = X$:
$$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono rappresentate dalle intersezioni della circonferenza avente centro nell'origine e raggio 1 con la retta di equazione $aY + bX + c = 0$

Equazioni omogenee

Un'equazione omogenea di secondo grado ha la forma: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

Per risolverla si divide per $\cos^2 x$ ottenendo l'equazione equivalente $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$

Questo metodo **non si può applicare** se $a = 0$ perché vengono eliminate delle soluzioni; in questo caso l'equazione diventa:

$$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad \text{e si può raccogliere } \cos x : \quad \cos x (b \sin x + c \cos x) = 0$$

L'equazione $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$

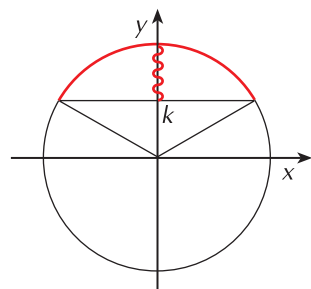
si trasforma in un'omogenea moltiplicando d per 1 cioè per $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

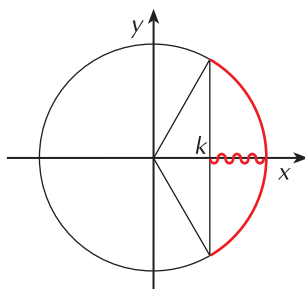
Disequazioni elementari

Per risolvere una **disequazione elementare** in una delle forme $\sin x \geq k$ $\cos x \geq k$ $\tan x \geq k$

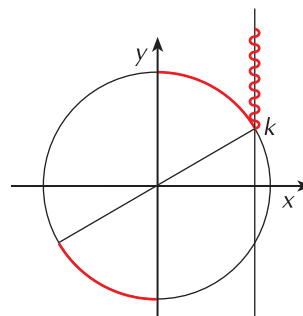
si ricorre alla circonferenza goniometrica individuando gli archi per i quali la funzione al primo membro soddisfa la disequazione



$$\sin x > k$$



$$\cos x > k$$



$$\tan x > k$$

Disequazioni frazionarie e sistemi

Per risolvere una disequazione goniometrica frazionaria oppure un sistema di disequazioni goniometriche si usano gli stessi metodi applicati per le analoghe disequazioni algebriche. È però conveniente usare delle tabelle circolari al posto di quelle lineari.