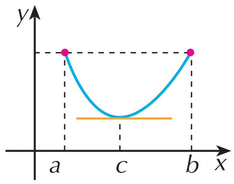
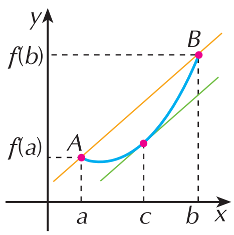
Concetti chiave e regole

I teoremi sulle funzioni derivabili

Le funzioni $f(x)$ derivabili godono di alcune proprietà che sono riassunte in una serie di teoremi; le ipotesi comuni sono che $f(x)$ deve essere continua in un intervallo $[a,\ b]$ e derivabile in $(a,\ b)$. In questo caso:



- **teorema di Rolle:** se la funzione assume valori uguali agli estremi, cioè se $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto c in $(a,\ b)$ dove la derivata prima si annulla.



- **teorema di Lagrange:** esiste almeno un punto c in $(a,\ b)$ in cui $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
- il **teorema di Cauchy** riguarda due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe continue in $[a,\ b]$ e derivabili al suo interno; richiede inoltre che $g'(x)$ non si annulli mai in $(a,\ b)$. In queste ipotesi, esiste almeno un punto $c \in (a,\ b)$ per il quale vale la relazione
  $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Il teorema di De L'Hospital e il calcolo dei limiti

Il **teorema di De L'Hospital** si utilizza per calcolare i limiti che si possono ricondurre alle forme di indeterminazione $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe definite in un intorno I di un punto x_0, soddisfano le seguenti ipotesi:

- si annullano entrambe in x_0 oppure i loro limiti per $x \to x_0$ sono entrambi infiniti
- sono derivabili in I eccettuato al più x_0
- $g'(x)$ non si annulla mai in I eccettuato al più x_0
- esiste il limite per $x \to x_0$ del rapporto delle due derivate $f'(x)$ e $g'(x)$

allora il limite del rapporto delle due funzioni è uguale al limite del rapporto delle due derivate:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In pratica, tutte le volte che un limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ e le due funzioni al numeratore e al denominatore sono derivabili, si può calcolare il limite del rapporto fra le due derivate.

Massimi e minimi relativi

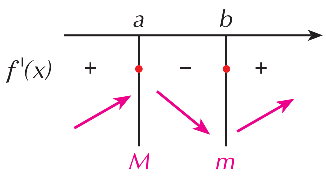
Considerata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a,\ b]$:

- un punto $x_0 \in [a,\ b]$ è un **punto di minimo relativo** per $f(x)$ se $f(x_0)$ è il valore più piccolo che la funzione assume in un intorno di tale punto, cioè se esiste un intorno di x_0 per tutti i punti x del quale $f(x) \geq f(x_0)$;
  in questo caso $f(x_0)$ è il minimo relativo della funzione;
- un punto $x_0 \in [a,\ b]$ è un **punto di massimo relativo** per $f(x)$ se $f(x_0)$ è il valore più grande che la funzione assume in un intorno di tale punto, cioè se esiste un intorno di x_0 per tutti i punti x del quale $f(x) \leq f(x_0)$;
  in questo caso $f(x_0)$ è il massimo relativo della funzione.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Criteri di individuazione

La derivata prima di una funzione rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva; essa ci consente di conoscere quando una funzione è crescente (derivata positiva) e quando è decrescente (derivata negativa) ed inoltre ci è utile per calcolare i punti di massimo e di minimo relativi delle funzioni. In particolare, per individuare i punti estremanti si deve:



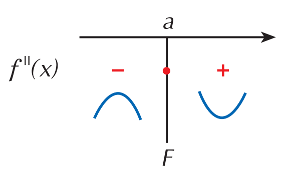
- trovare i punti che annullano la derivata prima o quelli in cui essa non esiste
- studiare il segno della derivata prima
- dedurre da esso quali punti sono di massimo o di minimo relativo.

Massimi e minimi assoluti

I **punti di massimo o di minimo assoluti** di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ sono i punti in cui la funzione assume il valore più grande o il valore più piccolo rispetto a tutti gli altri punti dell'intervallo; essi, se esistono, vanno ricercati fra i massimi o i minimi relativi, oppure fra i valori assunti dalla funzione negli estremi dell'intervallo considerato.

Concavità e flessi

La derivata seconda di una funzione rappresenta la concavità della curva: se è negativa la concavità è rivolta verso il basso, se è positiva è rivolta verso l'alto. I punti di flesso sono i punti in cui cambia la concavità della curva; per individuarli si deve:



- trovare i punti che annullano la derivata seconda o quelli in cui essa non esiste
- studiare il segno della derivata seconda
- dedurre da esso quali punti rappresentano dei flessi.

Massimi, minimi e flessi con le derivate successive

Per trovare i punti di massimo e di minimo relativo e i punti di flesso di una funzione $f(x)$, in alternativa ai metodi precedenti e se esistono le derivate successive di $f(x)$ fino a quella di ordine n, si può seguire questa procedura:

- si cercano i punti x_0 che annullano la derivata prima e si calcolano le derivate successive in x_0 fino a che se ne trova una che è diversa da zero; se questa è di ordine n, allora:
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \rightarrow \quad x_0$ è un punto di minimo
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \quad \rightarrow \quad x_0$ è un punto di massimo
  - se n è dispari $\quad \rightarrow \quad x_0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale
- si cercano i punti x_0 che annullano la derivata seconda e si calcolano le derivate successive in x_0 fino a che se ne trova una che è diversa da zero; se questa è di ordine n, allora:
  - se n è dispari $\quad \rightarrow \quad x_0$ è un punto di flesso
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \rightarrow \quad$ in x_0 la funzione è concava verso l'alto
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \quad \rightarrow \quad$ in x_0 la funzione è concava verso il basso.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas