APPROFONDIMENTO

Le equazioni parametriche di una curva

Immaginiamo un punto che si muove in un sistema di riferimento cartesiano; la sua posizione è individuata, istante dopo istante, da una coppia di coordinate (x, y) ciascuna delle quali dipende dal tempo t.
Per esempio, se il punto P si muove lungo la linea rappresentata in ***figura 1***, all'istante t_0 l'ascissa di P è $x_0 = x(t_0)$ e la sua ordinata è $y_0 = y(t_0)$; all'istante t_1 l'ascissa P è $x_1 = x(t_1)$ e la sua ordinata è $y_1 = y(t_1)$, e così via. In casi come questo l'ascissa e l'ordinata di un punto che appartiene a una curva sono date in funzione di un parametro t.
Il moto di una pallina che viene lanciata con una certa velocità è un esempio di un moto di questo tipo; se la velocità di lancio è di $4m/s$ ed ha un'inclinazione di 30° rispetto alla linea orizzontale (***figura 2a***), il moto lungo l'asse x è rettilineo uniforme con velocità $v_x = v \cos 30° = 2\sqrt{3}$m/s, quello lungo l'asse y è uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9{,}8$m/s^2 e velocità iniziale $v_y = v \sin 30° = 2$m/s.
Se il sistema di riferimento è fissato come in ***figura 2b***:

- il moto in orizzontale è descritto dalla legge

  $x = v_x \cdot t \qquad$ cioè $\qquad x = 2\sqrt{3}t$

- il moto in verticale è descritto dalla legge

  $y = v_y \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \qquad$ cioè $\qquad y = 2t - 4{,}9t^2$

Figura 1

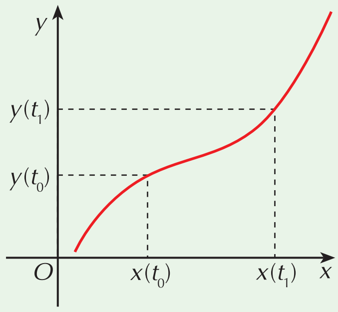
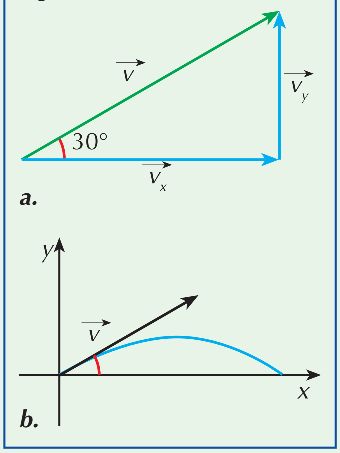


Figura 2



La posizione del punto P nel piano dove avviene il moto è quindi descritta da entrambe le equazioni contemporaneamente, cioè dal sistema:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

Molti fenomeni, per essere descritti in modo completo, hanno bisogno di una rappresentazione algebrica di questo tipo nel quale le coordinate di un punto dipendono entrambe da uno stesso parametro. In generale, possiamo dire che:

fissato un sistema di riferimento cartesiano, l'equazione di una curva si può esprimere in forma parametrica mediante il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

dove le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ esprimono le coordinate di un punto P della curva in funzione di t.

Vediamo come si possono esprimere in forma parametrica le equazioni dei principali luoghi di punti.

Le equazioni parametriche di una retta

Sappiamo che l'equazione di una retta che passa per due punti assegnati di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ha la forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

che, se poniamo $x_2 - x_1 = \ell$ e $y_2 - y_1 = p$, possiamo scrivere in questo modo

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{p}$$

Se ora indichiamo con t il valore comune delle due espressioni, se poniamo cioè $\frac{x - x_1}{\ell} = t$ e $\frac{y - y_1}{p} = t$, otteniamo le equazioni parametriche della retta.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \ell t + x_1} \\ \boldsymbol{y = pt + y_1} \end{cases}$$

Per esempio, la retta che passa per i punti $A(1, -2)$ e $B(-3, 0)$, ha equazione:

- considerando A come primo punto e B come secondo

  $\ell = x_2 - x_1 = -3 - 1 = -4$ $\quad p = y_2 - y_1 = 0 + 2 = 2$ $\quad \begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = 2t - 2 \end{cases}$
- considerando B come primo punto e A come secondo

  $\ell = 1 + 3 = 4$ $\quad p = -2 - 0 = -2$ $\quad \begin{cases} x = 4t - 3 \\ y = -2t \end{cases}$

Le equazioni parametriche di una retta non sono definite in modo unico perché basta prendere i punti in ordine inverso oppure scegliere altri due punti della retta per ottenere equazioni diverse.

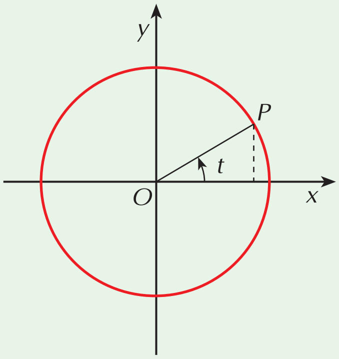
Le equazioni parametriche di una conica

La circonferenza

Consideriamo la circonferenza di raggio r avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali (***figura 3***). Le coordinate di un punto P della circonferenza, indicando con t l'angolo orientato che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle ascisse, sono date dalle relazioni

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi)$$

Figura 3



Queste dunque sono le equazioni parametriche di una circonferenza avente centro nell'origine; se il centro è un punto di coordinate (a, b), basta applicare alle precedenti equazioni la traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$ ottenendo

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = a + r \cos t} \\ \boldsymbol{y = b + r \sin t} \end{cases}$$

Per esempio, la circonferenza di centro $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ e raggio $r = 3$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 3 \cos t \\ y = 1 + 3 \sin t \end{cases}$$

La parabola

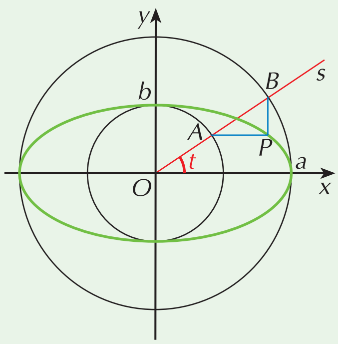
Per scrivere le equazioni parametriche di una parabola basta porre uguale a t la variabile indipendente dell'equazione; abbiamo così:

- $\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = at^2 + bt + c} \end{cases}$ se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse ***y***
- $\begin{cases} \boldsymbol{x = at^2 + bt + c} \\ \boldsymbol{y = t} \end{cases}$ se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse ***x***

L'ellisse

La costruzione di un'ellisse può essere fatta con riga e compasso disegnando due circonferenze concentriche aventi come raggi i semiassi dell'ellisse (***figura 4***); una semiretta s uscente dall'origine (centro comune delle due circonferenze) le interseca in A e B. Tracciata da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y, il loro punto di intersezione P appartiene all'ellisse. Indicato con t l'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse con la semiretta s, i punti A e B hanno coordinate

Figura 4



$$A(b\cos t,\ b\sin t) \qquad\qquad B(a\cos t,\ a\sin t)$$

Il punto P ha la stessa ascissa di B e la stessa ordinata di A:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_p = a\cos t} \\ \boldsymbol{y_p = b\sin t} \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0,\ 2\pi)$$

Al variare di t, queste equazioni descrivono l'ellisse.
Per esempio, l'ellisse di semiassi $a = 3$ e $b = 2$ ha equazione parametrica: $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

L'iperbole

Si dimostra che le equazioni parametriche di un'iperbole sono:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{a}{\cos t}} \\ \boldsymbol{y = b\tan t} \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0,\ 2\pi) \ \wedge \ t \neq \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

dove a è il semiasse trasverso e b quello non trasverso. Per esempio, l'iperbole di semiasse trasverso $a = 1$ e semiasse non trasverso $b = 3$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = 3\tan t \end{cases}$$

I esempio.

Scriviamo le equazioni parametriche della retta di coefficiente angolare 2 che passa per il punto $A(3,\ -1)$.

Osserviamo che, avendo posto $x_2 - x_1 = \ell$ e $y_2 - y_1 = p$, il coefficiente angolare della retta è proprio il rapporto $\frac{p}{\ell}$; possiamo quindi porre $p = 2$ e $\ell = 1$ (oppure $p = 4$ e $\ell = 2$ e così via, in modo che il rapporto sia sempre 2) e scrivere l'equazione della retta: $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$

II esempio.

Determiniamo la forma parametrica dell'equazione della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$.

Troviamo innanzi tutto centro e raggio della circonferenza: $C(1,\ -3)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 8} = 2\sqrt{2}$.

L'equazione in forma parametrica è quindi $\begin{cases} x = 1 + 2\sqrt{2}\cos t \\ y = -3 + 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$

III esempio.

Una conica ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$; dopo averne individuato il tipo, scriviamo la sua equazione cartesiana.

La forma dell'equazione suggerisce che si tratta di una ellisse di semiassi $a = 2$ e $b = 1$. La sua equazione cartesiana è quindi $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

IV esempio.

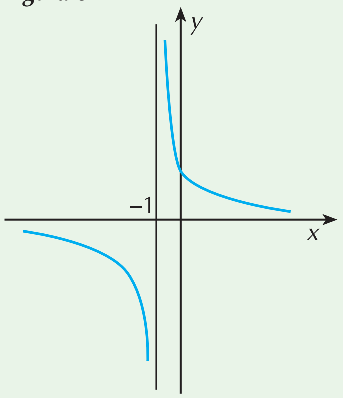
Una curva ha equazione parametrica $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$; scriviamo la sua equazione cartesiana.

Dobbiamo eliminare il parametro t dalle due equazioni; ricaviamo allora l'espressione di t dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$t = \frac{x+1}{2} \qquad \text{quindi} \qquad y = \frac{2}{x+1}$$

Si tratta di una funzione omografica avente per asintoti l'asse delle ascisse e la retta di equazione $x = -1$ (***figura 5***).

Figura 5



ESERCIZI

1 La retta che passa per i punti di coordinate $(1, -1)$ e $(2, 3)$ ha equazione (sono possibili più alternative):

a. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -4t - 1 \end{cases}$

2 La circonferenza che ha centro nell'origine e raggio 3 ha equazione parametrica:

a. $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 9\sin t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

3 Costruisci per punti le curve che hanno le seguenti equazioni parametriche e riconoscine il tipo

a. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2t^3 - t^2 \\ y = t^3 - t + 1 \end{cases}$

4 Scrivi l'equazione cartesiana delle rette di equazioni parametriche

a. $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t - 2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{4}{3} \end{cases}$ $[3x - 2y - 1 = 0;\ 2x - 3y + 4 = 0]$

5 Scrivi una possibile equazione parametrica della retta $x + y - 2 = 0$. $\left[\begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \end{cases}\right]$

6 Scrivi un'equazione parametrica della retta che passa per i punti $A(1, -3)$ e $B(2, 5)$. $\left[\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 8t - 3 \end{cases}\right]$

7 Trova le coordinate del punto di intersezione della retta di equazione cartesiana $2x - 3y = 5$ con la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$. $\left[\left(\frac{25}{7}, \frac{5}{7}\right)\right]$

8 Scrivi l'equazione parametrica della retta che passa per $A(0, 1)$ ed è parallela a quella di equazione cartesiana $y = 3x - 5$.
(Suggerimento: ricorda che $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{p}{\ell}$) $\left[\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 \end{cases}\right]$

9 Scrivi l'equazione parametrica della retta che passa per $A(2, 7)$ ed è perpendicolare alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. $\left[\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 7 \end{cases}\right]$

10 Trova le coordinate dei punti di intersezione fra la circonferenza avente centro nell'origine e raggio 2 e la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2(t - 1) \end{cases}$. $[(2, 0); (0, -2)]$

11 Data la curva di equazione parametrica $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$, riconoscine il tipo e scrivi la sua equazione in coordinate cartesiane. $\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\right]$

12 Data la curva di equazione parametrica $\begin{cases} x = \dfrac{5}{\cos t} \\ y = 3 \tan t \end{cases}$, riconoscine il tipo e scrivi la sua equazione in coordinate cartesiane. $\left[\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1\right]$

13 Scrivi l'equazione parametrica dell'ellisse con centro nell'origine di semiassi $a = 6$ e $b = 4$. $\left[\begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}\right]$

14 Scrivi l'equazione parametrica della circonferenza avente centro nell'origine e raggio 6. Successivamente trova le coordinate dei punti di intersezione con la retta $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$. $\left[\left(\pm 3, \pm 3\sqrt{3}\right)\right]$

15 Scrivi l'equazione parametrica della circonferenza avente centro nel punto $C(1, 4)$ e raggio 5. Trova poi la lunghezza della corda intercettata sull'asse delle ascisse. $\left[\begin{cases} x = 1 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}; 6\right]$

16 Scrivi l'equazione parametrica dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che ha vertice in $V\left(\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$. $\left[\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{6}{t} \end{cases}\right]$

Scrivi l'equazione cartesiana delle curve che hanno le seguenti equazioni parametriche.

17 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{2t - 1}{t - 5} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{t}{t - 1} \end{cases}$ $\left[y = \frac{2x - 3}{x - 6}; y = \frac{x - 1}{x - 2}\right]$

18 $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \dfrac{4}{7}t \\ y = \dfrac{7}{t} \end{cases}$ $[y = x^2 - 6x + 8; xy = 4]$

19 $\begin{cases} x = \dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t} \\ y = \dfrac{2t}{t+1} \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{2-x}{4};\ y = 1-x\right]$

20 $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = \dfrac{4t^2}{1-t^2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ $\left[y = 2x-2;\ xy = \dfrac{1}{4}\right]$

21 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1+\sin t \\ y = 2+\cos t \end{cases}$ $\left[\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1;\ x^2+y^2-2x-4y+4=0\right]$