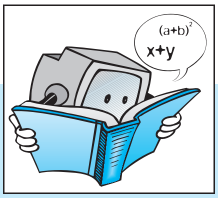
OPERAZIONI E INSIEMI NUMERICI

4



Per ricordare

★ Un'**operazione binaria** in un insieme non vuoto A è una legge che ad ogni coppia di elementi $a,b \in A$ associa un elemento $c \in A$. Gli elementi a e b si chiamano operandi o termini dell'operazione, l'elemento c è il risultato.
Per indicare che c è il risultato dell'operazione fra a e b si scrive $a * b = c$ dove il simbolo $*$ (o un qualsiasi altro simbolo) indica la legge che definisce l'operazione.
Lo strumento più comodo per rappresentare un'operazione è una tabella a doppia entrata nella quale, ad ogni incrocio fra una riga e una colonna si scrive il risultato dell'operazione. Per esempio, se nell'insieme N definiamo la legge $*$ tale che $a * b = a + 2b$, essendo a e b numeri naturali, la tabella è illimitata, ma possiamo rappresentarne una parte in questo modo:

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	2	4	6	8	10
1	1	3	5	7	9	11
2	2	4	6	8	10	12
3	3	5	7	9	11	13
4	4	6	8	10	12	14
5	5	7	9	11	13	15

★ Le proprietà delle operazioni. Considerata un'operazione $*$ in un insieme A, diciamo che:

- la legge $*$ è **commutativa** se $\forall a,b \in A \qquad a * b = b * a$
- la legge $*$ è **associativa** se $\forall a,b,c \in A \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$
- l'insieme A è dotato di **elemento neutro** rispetto alla legge $*$ se esiste un elemento n tale che, $\forall a \in A \qquad a * n = n * a = a$
- l'elemento a possiede il **simmetrico** (o inverso) rispetto alla legge $*$ se esiste un elemento $a' \in A$ tale che $a * a' = a' * a = n$; in questo caso, a' è il simmetrico di a. Se ogni elemento di A possiede il simmetrico, si dice che la legge $*$ è invertibile.

Se invece consideriamo due operazioni $*$ e $\triangle$ definite in A, diciamo che:

- la legge $*$ è **distributiva** rispetto a $\triangle$ se, $\forall a,b,c \in A$

$$a * (b \triangle c) = (a * b) \triangle (a * c) \qquad \text{e} \qquad (b \triangle c) * a = (b * a) \triangle (c * a)$$

Se una sola delle due precedenti relazioni è vera, allora diciamo che $*$ è distributiva solo a destra nel primo caso, solo a sinistra nel secondo.
Leggendo la proprietà da destra verso sinistra si ottiene la **proprietà di raccoglimento**.

★ Il primo insieme numerico in cui si impara a lavorare è l'insieme N dei numeri naturali. Un numero naturale viene definito in base alla relazione di equipotenza fra insiemi:

- due insiemi si dicono **equipotenti** se i loro elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

La relazione di equipotenza è riflessiva, simmetrica e transitiva ed è quindi una relazione di equivalenza. Si definisce allora il numero naturale come classe di equivalenza degli insiemi equipotenti. N è quindi l'insieme:

$$N = \{0,1,2,3,4,5,..........\}$$

In N è sempre possibile eseguire l'addizione e la moltiplicazione, ma non è sempre possibile eseguire la sottrazione e la divisione; per risolvere questi problemi si costruiscono altri insiemi numerici come "ampliamento" di N.

★ Z è l'insieme dei numeri interi, cioè dei numeri che si costruiscono a partire dai numeri naturali assegnando ad essi un segno positivo oppure negativo:

$$Z = \{.... -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$$

I numeri con segno "+" si dicono interi positivi ed il relativo sottoinsieme si indica con Z^+, quelli con segno "−" si dicono interi negativi ed il relativo sottoinsieme si indica con Z^-.
Possiamo quindi dire che $Z = Z^- \cup Z^+ \cup \{0\}$.
Ogni numero intero è quindi caratterizzato da un numero naturale, che si dice **valore assoluto** o **modulo**, preceduto da un segno; il valore assoluto di un numero intero a si indica ponendo fra due barre verticali il numero stesso:

valore assoluto di $+3 \quad \rightarrow \quad |+3| = 3$ valore assoluto di $-3 \quad \rightarrow \quad |-3| = 3$

Ricordiamo poi che:

- due numeri interi che hanno lo stesso valore assoluto e segni diversi si dicono **opposti**: -2 e $+2$
- due numeri interi che hanno segni diversi si dicono **discordi**: -5 e $+9$
- due numeri interi che hanno lo stesso segno di dicono **concordi**: $+3$ e $+6$ -4 e -8

Le operazioni che si possono eseguire in Z sono:

- l'addizione: $(+3)+(+7)=+10$ $(-5)+(-8)=-13$ $(-7)+(+5)=-2$ $(-8)+(+12)=+4$
- la sottrazione, eseguendo la somma del primo numero con l'opposto del secondo:
  $(+7)-(+15)=(+7)+(-15)=-8$
- la moltiplicazione, eseguendo il prodotto dei valori assoluti dei due numeri e attribuendo il segno in base alla regola dei segni:

·	+	−
+	+	−
−	−	+

$(+3)\cdot(+4)=+12$ $(-2)\cdot(-8)=+16$ $(-5)\cdot(+2)=-10$ $(+6)\cdot(-4)=-24$

Non è invece sempre possibile eseguire la divisione.

★ Q è l'insieme dei numeri razionali, cioè dei numeri che si possono esprimere sotto forma di frazione $\dfrac{a}{b}$ oppure sotto forma di numero decimale che corrisponde alla divisione fra a e b; a questo numero si attribuisce poi un segno con la stessa convenzione usata per i numeri interi.

Con simbologia analoga a quella usata per i numeri interi possiamo dire che $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$. Analoghe sono anche le definizioni di numeri razionali opposti, concordi, discordi; diciamo poi che il numero $\frac{a}{b}$ e il numero $\frac{b}{a}$ sono **reciproci**.

In questo insieme si possono eseguire le quattro operazioni fondamentali: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione con le seguenti regole:

- addizione e sottrazione: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- moltiplicazione: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- divisione: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

★ **Le proprietà delle potenze.** Una potenza ad esponente naturale è un modo abbreviato per scrivere la moltiplicazione di un numero a per se stesso un certo numero di volte:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ..... \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

Casi particolari:

- $a^0 = 1$ se $a \neq 0$ non si definisce la potenza 0^0
- $a^1 = a$
- $0^n = 0$ se $n \neq 0$

Inoltre, se $a \neq 0$ si può definire anche la potenza con esponente intero negativo; se $b > 0$: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

Qualunque sia il numero a (naturale, intero, razionale) e tenendo comunque presenti i casi particolari elencati, valgono le seguenti proprietà:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

1 Stabilisci se le leggi $*$ individuate dalle tabelle che seguono sono delle operazioni nell'insieme indicato; in caso contrario modifica, quando possibile, l'insieme di riferimento in modo che essa diventi un'operazione.

a.

$*$	a	b	c
a	a	a	b
b	b	b	c
c	c	c	c

in $A = \{a, b, c\}$

b.

$*$	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

in $B = \{1, 2, 3, 4\}$

[**a**. è un'operazione; **b.** non è un'operazione, ma lo diventa in $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$]

2 Stabilisci se le seguenti relazioni sono operazioni negli insiemi assegnati:

a. addizione in $A = \{-5, 0, 5\}$ [no]

b. moltiplicazione in $A = \{-1, 0, 1\}$ [si]

c. $a * b = \frac{1}{4}ab$ nell'insieme dei numeri pari [no]

3 Stabilisci se l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni nell'insieme $A = \{x \in N \mid x = 3k, k = 0, 1, 2, 3, 4\}$.

[$A = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, nè l'addizione nè la moltiplicazione sono operazioni]

4 **ESERCIZIO GUIDATO**

Nell'insieme N è data le legge $a * b = 2a + b$; dopo aver verificato che si tratta di un'operazione, individua le sue proprietà.

La legge è un'operazione perchè se a e b sono numeri naturali, anche $2a$ è naturale e quindi $2a + b \in N$.
L'operazione non è commutativa perchè $a * b = 2a + b$ mentre $b * a =$ .....
Non è nemmeno associativa e basta vederlo su un controesempio usando tre numeri naturali qualsiasi, per esempio 1, 2, 3:

- $(1 * 2) * 3 = (2 \cdot 1 + 2) * 3 = 4 * 3 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$
- $1 * (2 * 3) =$ ....

Non esiste elemento neutro perchè non c'è nessun numero naturale tale che $a * n = n * a = a$

Infatti $a * n =$ .... $n * a =$ ....

Non essendoci l'elemento neutro non esiste nemmeno la possibilità che l'operazione sia invertibile.

5 Nell'insieme N sono date le seguenti leggi: $a \sim b = a + 2b$ e $a \# b = 3(a + b)$; calcola

a. $0 \sim 2$ **b.** $2 \sim 2$ **c.** $1 \# 3$ **d.** $2 \# 2$

e. $1 \sim (3 \# 0)$ **f.** $0 \sim (1 \# 1)$ **g.** $2 \# (3 \sim 1)$ **h.** $1 \# (4 \sim 2)$

[**a**. 4; **b**. 6; **c**. 12; **d**. 12; **e**. 19; **f**. 12; **g**. 21; **h**. 27]

6 Trova le proprietà delle leggi $\approx$ e $\#$ definite nell'esercizio precedente; verifica poi mediante un controesempio che le due operazioni non sono distributive una rispetto all'altra.

[$\sim$ nessuna proprietà; $\#$ è commutativa]

7 Nell'insieme dei numeri pari considera la legge $a * b = \frac{a \cdot b}{2}$; verifica che si tratta di un'operazione e calcola:

a. $2 * 4$ **b.** $6 * 2$

c. $8 * 10$ **d.** $4 * 12$.

Quali sono le proprietà di questa operazione?

[**a**. 4; **b**. 6; **c**. 40; **d**. 24; commutativa, associativa]

8 Completa la tabella in modo che essa rappresenti un'operazione nell'insieme in cui è definita, che abbia c come elemento neutro e che sia commutativa.

$*$	a	b	c	d
a	b	c		
b		a		
c			c	
d	a	d		d

[
$*$	a	b	c	d
a	b	c	a	a
b	c	a	b	d
c	a	b	c	d
d	a	d	d	d
]

9 Completa la tabella in modo che essa rappresenti un'operazione nell'insieme in cui è definita, che abbia c come elemento neutro e che sia invertibile in modo che gli inversi di a, b, c siano rispettivamente b, a, c.

$*$	a	b	c
a	b		
b		b	
c			

[
$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	b
c	a	b	c
]

Semplifica le seguenti espressioni in N applicando, dovunque è possibile, le proprietà delle potenze:

10 $\left[(2^2)^4\right]^3 : 2^{12} : (2^6)^2$ [1]

11 $3^2 \cdot 3^4 : (3^0)^4 : \left[(3^5)^3 : (3^2)^6\right]$ [27]

12 $\left[(3^4 : 3 : 3^3)^5 + 24 : (2^5 : 2^4)^3\right] \cdot \left\{31 - \left[3 \cdot 3^2 - (12-7)^2\right] \cdot (81 : 3^2 + 125 : 5^2)\right\}$ [12]

13 $\left[(4^5)^4 : 4^8 : (4^3)^3 - 7 \cdot (3^4 : 3^2)\right] + \left\{\left[96 + (5^2)^4 : 5^7 - (5+6^4)^0\right]^5 : 10^8 - 2^3 \cdot \left[3^2 + (10-3^2)^{12}\right]\right\}$ [21]

14 $8^3 \cdot 2^9 : \left[(2^2)^5 : (4 \cdot 2^6)\right]^8 : 4$ [1]

15 $\left[(5^2)^4 : 5^6 \cdot 2^2\right]^4 : \left[(2^3)^5 \cdot 5^4 : (2^3 \cdot 2^8)\right]^2$ [1]

16 $\left[2^3 \cdot (2^3)^2\right]^2 \cdot 2 : \left\{\left[(4^2)^0\right]^5 \cdot 16^4 \cdot 2^2\right\}$ [2]

17 $\left[(4^2)^3\right]^3 : \left[(2^{12})^2 \cdot 4^4\right] + \left[3^{12} : (3^6)^2\right]^{12}$ [17]

18 $\left\{\left[(4^2)^3 : 2\right]^3 : \left[(2^{12})^2 \cdot 4^4\right] + 1\right\} : \left\{\left[(3^3)^3\right]^2 : 3^{17}\right\}$ [1]

Semplifica le seguenti espressioni in Q applicando, dovunque è possibile, le proprietà delle potenze:

19 $\left\{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{9}\right)^6\right\} \cdot 3$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

20 $\left\{\left(\frac{1}{16}\right)^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3+\frac{1}{2^2}\right\}+\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13}:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^7\right]^7\right\}^{21}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

21 $\left\{\left(\frac{1}{13}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{13}\right)^2:\left[\left(-\frac{1}{13}\right)^2\right]^3\right\}\cdot\left[13^2\cdot\left(13^6\right)^2:13^5\right]$ $[13]$

22 $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}:\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2:\left(\frac{1}{16}\right)^5$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

23 $\left[\left(\frac{1}{6}\right)^4:6\right]^2:\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4\right\}$ $\left[\frac{1}{36}\right]$

24 $\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]^4\cdot\left(2^3\right)^2:2^5\right\}\cdot\left\{\left[\left(100^2\right)^3:10^{11}\right]-\frac{2^4}{2^3}\right\}$ $[1]$

25 $\left[\left(-5^3\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{10}\right]:\left\{4\cdot 2^2+\left(3^8\right)^2\cdot\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^7\right]^2\right\}$ $[1]$

26 $\left\{\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left[\left(3^4\right)^2:\left(-3\right)^3\right]\right\}:\left[\left(2^3\right)^2:2^4\right]$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

27 $\left(5^2-2^4\right)\cdot 3^4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}\right)^2+\left(\frac{3+3^2}{2}\cdot\frac{2^4}{6}\right)^2:\left(2^2\right)^3$ $[5]$

28 $\left\{\left(\frac{1}{4}+1\right)^3:\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\cdot 5^2\right]\right\}\cdot\left(\frac{3^2+1}{3\cdot 5}\right)^2$ $\left[\frac{5}{64}\right]$

29 $\left[\left(4^3+4^2\right)\cdot\frac{5}{10^2}\right]-\left[\left(3^3\right)^2:3^5+\left(3^3+1\right)^0\right]$ $[0]$

30 $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5:\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left[\left(2^4\right)^3:\left(2^6\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)^0\right]\right\}\cdot 2^{16}:\left(2^7\right)^2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni, che contengono anche potenze ad esponente negativo, applicando ovunque sia possibile le proprietà delle potenze:

31 $\left[2^3\cdot\left(2^4\right)^{-1}:\left(2^2\right)^3\right]:2^{-6}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

32 $\left\{5^{11}:\left[\left(5^2\right)^{-1}\cdot 5^3\right]^2\right\}\cdot\left[\left(\frac{1}{5^3}\right)^6:5^2\right]$ $[1]$

33 $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(3^2\right)^5\right]^{-1}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}:\left(3^4\right)^0\right]:\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

34 $\dfrac{(4^4)^5}{4^{-2}}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right]^2\cdot(4^{-1}\cdot4^5)^{-2}$ [256]

35 $\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^5\cdot3^{-1}\right]^2\cdot\left[(27^3)^{-2}:9^2\right]^{-1}:\left[(-3)^3\cdot3^0\right]^3$ [−3]

36 $\left[\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right]^3\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-2}:\left[64^2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{10}\cdot(-2)^5\right]$ [16]

37 $\left\{(4^3)^6\cdot3^5\cdot\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-5}\right]^2:(12^2\cdot12^3)^3\right\}\cdot2^{-4}$ [4]

38 $\left[15^4\cdot(3^2\cdot5)^{-2}\right]^5\cdot\left\{\left[\dfrac{20}{(4^3)^2:2^{10}}\right]^{-4}\right\}^2$ [25]

39 $\left\{\left(4^{12}\cdot\dfrac{1}{4}\right)^{-1}\cdot\left[(2^3)^5\right]^2:2^4\right\}\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left[(2^3)^2:2^6+8^0\right]^{-1}\right\}$ [2]

40 $\left[\left(\dfrac{1}{7}\right)^7\cdot\left(\dfrac{1}{7}\right)^3\right]^2\cdot\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-12}\cdot(7^3)^2\cdot\left[\dfrac{125}{5^2}\cdot\left(\dfrac{10^{-2}}{10^{-1}}\right)^{-1}-3^0\right]$ [1]

41 $[1+(5^2-9):2^4]\cdot\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^5\right]^{-1}\cdot\left[64:2^5+(7+4^4)^0\right]^{-6}$ [−18]

42 $\left\{(7^3)^3:\left[25\cdot5^{-1}+8^5:(2^{-2})^{-7}\right]^8+3\right\}^2-2^{-4}\cdot(6^3)^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$ [64]

43 $\left[(5^{10})^0+64:(2^2)^2\right]^3:\left\{\left[(10^2)^5\cdot(10^3)^{-3}\right]^2:(-4)\right\}+[6^2:(3^4\cdot3^{-2}\cdot2)]^2$ [−1]

44 $\left\{\left[\dfrac{5^2}{5}+(2^4)^2:2^6\right]^3:\left[3^{-5}\cdot(3^4)^2\right]+(3+4^2)^0\right\}:\left(\dfrac{7}{2^2}\cdot4^3\cdot2^{-1}\right)$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

45 $\left[5^{11}\cdot\left(\dfrac{3^4:3^3}{3^{-1}}+5^0\right)^8:\dfrac{(50^3)^3}{5^{-2}}\right]\cdot\left[4^{11}:(2^{10})^2-25\cdot5^{-1}+2^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right]^2$ [10]

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1 Nell'insieme $\mathscr{P}(A)$ delle parti di un insieme A considera la legge $*$ che ad ogni coppia di elementi di $\mathscr{P}(A)$ associa la loro intersezione e la legge $\triangle$ che ad ogni coppia di elementi di $\mathscr{P}(A)$ associa la loro unione. Dopo aver verificato che $*$ e $\triangle$ sono operazioni in $\mathscr{P}(A)$ stabilisci:

a. se entrambe le operazioni sono commutative [si]

b. se sono associative [si]
c. se $*$ è distributiva rispetto a $\triangle$ [si]
d. se $\triangle$ è distributiva rispetto a $*$ [si]
e. se esiste elemento neutro rispetto a $\triangle$ [è l'insieme vuoto]
f. se esiste elemento neutro rispetto a $*$ [è l'insieme A]
g. se le operazioni sono invertibili [nessuna delle due]

2 Data la legge $a \sim b = \begin{cases} a & \text{se } a \geq b \\ b & \text{se } b > a \end{cases}$, verifica che si tratta di un'operazione in qualunque sottoinsieme di N; costruisci poi la tabella di questa operazione nell'insieme $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e indica quali sono le sue proprietà. [commutativa, associativa, el. neutro 1, non è invertibile]

3 Data l'operazione $*$ definita dalla tabella:

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	a	a	e	c
c	c	a	d	d	b
d	d	c	d	e	a
e	e	c	b	a	b

a. calcola $(a * b) * c$ e $[e * (a * c)] * (e * e)$
b. stabilisci se l'operazione è commutativa
c. individua l'elemento neutro e stabilisci se l'operazione è invertibile

[**a**. a, a; **b**. no; **c**. el. neutro: a, non è invertibile]

4 Data l'operazione $*$ definita dalla tabella:

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	d	a	e	c
c	c	a	d	d	b
d	d	e	d	e	a
e	e	c	b	a	b

a. calcola $a * (b * c)$ e $[a * (a * c)] * (d * d)$
b. stabilisci se l'operazione è commutativa
c. individua l'elemento neutro e stabilisci se l'operazione è invertibile
d. calcola l'inverso di ogni elemento. [**a**. a, b; **b**. si; **c**. a, si; ; **d**. a, c, b, e, d]

Semplifica le seguenti espressioni applicando dove è possibile le proprietà delle potenze:

5 ESERCIZIO GUIDATO

$$0,125^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{-1} + 0,5^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}\right]^{-2} \cdot \left[1,5 \cdot 2 + \left(2^3\right)^4 : 4^5 + 1\right]^2 - \left(0,1\overline{6} + 0,\overline{4}\right)$$

Per prima cosa è necessario trasformare i numeri decimali in frazioni; ricordiamo allora come si opera:

- per trasformare in frazione un numero decimale finito si scrive il numero senza la virgola al numeratore e 10^n al denominatore, dove n è il numero di cifre decimali:

$$0,125 = \frac{125}{10^3} = \frac{1}{8} \qquad 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

- per trasformare in frazione un numero decimale periodico si scrive al numeratore la differenza fra il numero senza la virgola e la parte che precede il periodo, al denominatore il numero che ha tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo:

$$0,1\overline{6} = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} \qquad 0,\overline{4} = \frac{4}{9}$$

Semplifica adesso l'espressione che ottieni. $\left[-\frac{1}{9}\right]$

6 $(5^2)^3 - \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2 \cdot (5^3 : 0,2^{-1}) + \left[0,04^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^4\right] \cdot 125 + (4^3 \cdot 4^2)^0 \cdot (0,\overline{3})^{-1}$ [8]

7 $0,\overline{6} + \left[2^{16} : (4^2 \cdot 8^6 \cdot 0,375^2)\right] \cdot (0,5^{-3} + 2^0)^2 : 3^3$ [1]

8 $(0,25)^2 + \left[\frac{4}{16^3} \cdot (-2)^5 \cdot (0,2)^4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-4}\right]^4 + 0,625 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (-2)^{-3} \cdot \frac{8^2}{3} \cdot \frac{3}{2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

9 $\left\{\left[0,6^2 \cdot 3^{-1} : \left(\frac{1}{5}\right) + 0,2\right]^3 : 0,25^{-3} + \frac{3}{125}\right\} \cdot \left[(5^2)^3 : 5^5\right]^2$ $\left[\frac{4}{5}\right]$

10 $(0,\overline{39} - 0,\overline{06})^3 + \frac{15}{3^3} + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right]^{-1} \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 : 2 + 0,\overline{296}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

11 $\left[\left(\frac{16}{10}\right)^2 : (2^3 \cdot 2^2) + 0,12\right]^5 : \left(\frac{1}{25}\right)^2 + 0,3 + \left(0,\overline{02} - \frac{4}{9} + 0,\overline{31}\right)^2 \cdot 3^3$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

12 $\left[(3^{-5})^2 \cdot (-3)^2 : (3^{-2})^3 + 1,0\overline{3}\right]^3 + 3,2 + \frac{6^2}{(-10)^3} \cdot 100 + (-1,1\overline{4})^3$ $\left[-\frac{2}{5}\right]$

13 $\left[0,27\overline{3} - (2+3^6)^0 - 0,05\overline{1} + \frac{(2+2^0)^3}{27}\right]^2 : \left[(15^2 : 3) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot (-5)^{-1}\right] - 0,0\overline{6}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

14 $\left(\frac{3^2}{6} \cdot 2^5 \cdot 0,2 : 3 - \frac{1}{5}\right)^2 : 4 + \left[\left(\frac{0,1^{-2}}{7^2+1}\right)^4 \cdot 0,125 + (-0,5)^2\right] \cdot 4 - \left(0,\overline{3} + \frac{5^2-5}{15 \cdot 2^2}\right)^{-2}$ [9]

15 $$\frac{\left[5^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^2\right] \cdot 25^{-2} + 3}{(4^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 : 16^3} \cdot (-16)^2 + \frac{(11^2 - 7 \cdot 3)^2}{\left[\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot 11 + 5^0\right]^3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$$ [−3]

16 $\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot 2^3 + \frac{7^2+(5^3)^4:(5^6)^2}{10^3\cdot(-10)^5:(10^2)^3} - \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^5:\left(\frac{1}{8}\right)^4}{\left[6^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right):3^3\right]^{-3}}$ $[1]$

17 $\frac{(1+3^2+2^2)^3:(7\cdot 2)^2+\left[(-1)^{-2}\right]^{-3}\cdot\left[5\cdot 10+(-1)^3\right]}{(2+4^3)^0+(36^2)^3:(5+3^0)^{11}} : 3 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{8^3\cdot 8^2:4^9}-\frac{4}{5}\right):\frac{8}{5}$ $[5]$

18 $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{(-1)^6}{(3^2)^4\cdot 9^{-2}:3^4+\frac{16^2}{(-4)^3}+7^{11}:49^5-6^0}\right]^{-1}+\frac{[6^2:(3^4\cdot 3^{-2}\cdot 2)]^2}{7}$ $\left[\frac{5}{7}\right]$

19 $\frac{\left[(11^2)^7:(11^5\cdot 11^4)\right]\cdot(-11)^{-3}}{(-3)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2:3+\left(\frac{2^3\cdot 2^4}{2^6}\right)^3:(-4)} + \frac{\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-1}+\frac{2^7:(2^2)^3+2^0}{2^2}+1\right]^3}{[2+(5^2-9):2^4]^2}$ $[14]$

20 $\frac{\left[(4^2)^3\right]^3:\left[(2^{12})^2:(-4)^{-4}\right]:2^3+\left[\frac{17}{10}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{(-5)^{-1}}{2^4+2^0}\right]^{-1}}{(9^2)^5:3^{11}:(3^4)^2}$ $[-2]$

21 $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3:\left(-\frac{1}{3}\right)^5+1\right]^2:(2^2\cdot 2)+\frac{\left\{\left[(2^3)^2:2^6+8^0\right]^{-1}\right\}^{-2}}{(7^3)^2\cdot 7^{-5}+(5^0+1)^3:2^2}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni per i valori indicati dalle lettere:

22 $\frac{(a+1)+(1-a)^2}{a}:\frac{2}{a^2}+\left(a-\frac{1}{3}\right)$ per $a=\frac{1}{3}$; $a=3$ $\left[\frac{8}{27};\frac{44}{3}\right]$

23 $\frac{\left[a+\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}{a^{-1}}:\frac{a-1}{a-\frac{3}{2}}$ per $a=\frac{1}{2}$; $a=-\frac{1}{2}$ $\left[2;-\frac{2}{3}\right]$

24 $\frac{a-b}{a+b}-\frac{1-a^2}{2-b}\cdot\frac{b}{a}$ per $a=\frac{1}{2}\wedge b=\frac{1}{3}$; $a=\frac{1}{3}\wedge b=-1$ $\left[-\frac{1}{10};-\frac{10}{9}\right]$

25 $\frac{(a:2^3+b^2)^{-2}}{b^{-1}+b^0}-a^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$ per $a=1,\overline{7}\wedge b=0,\overline{3}$; $a=-2\wedge b=-\frac{1}{2}$ [2; impossibile]

26 $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^2}{3^2}+\dfrac{ab+1}{1-b}+\dfrac{a+b}{a^2b+\dfrac{4}{15}}-\dfrac{1}{b}$ per $a=\dfrac{1}{5}\wedge b=\dfrac{5}{3};\quad a=-1\wedge b=0$

[7; impossibile]

27 $\dfrac{\dfrac{1}{y}+2x^{-1}}{2^2}+\dfrac{xy+\dfrac{3}{35}}{y}+\dfrac{x-y}{x+2y}-\dfrac{\dfrac{1}{4}}{xy}$ per $x=\dfrac{2}{5}\wedge y=\dfrac{1}{7};\quad x=2^{-1}\wedge y=-2^{-1}$

$\left[0;\ -\dfrac{6}{35}\right]$

28 $\dfrac{ab\cdot(3^2+1)}{\dfrac{7b}{a}}\cdot\dfrac{2a+3b}{(a-2b)a^2}+b^2$ per $a=-\dfrac{1}{5}\wedge b=-\dfrac{3}{2};\quad a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\wedge b=2$

$\left[-\dfrac{1}{4};\text{impossibile}\right]$

Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

29 $\dfrac{(-5)^2\cdot(-5)^5:(-5)^6}{(-5)^2}=\dfrac{1}{5}$ [falsa]

30 $\left(\dfrac{4}{9}\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^5:\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right]=\left(\dfrac{4}{3}\right)^0$ [vera]

31 $\dfrac{2^3\cdot9^5\cdot6^2}{16^2\cdot3^{11}}=\dfrac{12^4\cdot5^4}{25^2\cdot(4^2)^2\cdot2^3\cdot27}$ [vera]

32 $\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+0,125\right]^3=0$ [vera]

33 $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3:\left(\dfrac{9}{4}\right)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+0,25=1$ [falsa]

34 $\dfrac{2^3\cdot9^6\cdot5^2}{15^3\cdot3^{11}}=\dfrac{(6^2\cdot5)^2:3}{3^5\cdot10^3}$ [falsa]

35 $\left\{\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]^3\right\}^3-\left(\dfrac{81}{16}\right)^4\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^0=1$ [vera]