APPROFONDIMENTO

Le equazioni omogenee in seno e coseno

Un'equazione che contiene solo le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ è *omogenea* se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado. In particolare, ci occupiamo delle **equazioni omogenee di secondo grado** che quindi assumono la forma:

$$\boldsymbol{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0}$$

Per risolvere questo tipo di equazione dobbiamo distinguere il caso in cui sia $a \neq 0$ oppure $a = 0$.

Anche un'equazione del tipo

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

è omogenea; si tratta di un'equazione omogenea di primo grado che abbiamo già imparato a risolvere come equazione lineare.

- Se $a \neq 0$, posto $\cos x \neq 0$, dividendo entrambi i membri per $\cos^2 x$ otteniamo un'equazione di secondo grado di incognita $\tan x$:

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \qquad \rightarrow \qquad a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

- Se $a = 0$, non è più possibile dividere per $\cos^2 x$ perché i valori che annullano il coseno sono soluzioni dell'equazione; possiamo però raccogliere $\cos x$ a fattor comune e applicare poi la legge di annullamento del prodotto:

$$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

$$\cos x \cdot (b \sin x + c \cos x) = 0$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\cos x = 0 \qquad\qquad b \sin x + c \cos x = 0$$

Primo esempio

Risolviamo l'equazione: $\sin^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$

Essa è omogenea di secondo grado ed è $a \neq 0$. Dividiamo quindi entrambi i suoi membri per $\cos^2 x$ ottenendo

$\tan^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0$ da cui $\tan x = 1 \quad \vee \quad \tan x = \sqrt{3}$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi: $x = 45° + k180° \quad \vee \quad x = 60° + k180°$.

Secondo esempio

Risolviamo l'equazione: $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$

Essendo $a = 0$, non possiamo dividere per $\cos^2 x$; raccogliamo $\cos x$ a fattor comune:

$$\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = 0$$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

- $\cos x = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \qquad 1 + \sqrt{3}\tan x = 0 \qquad \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad \rightarrow \qquad x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$

L'equazione è omogenea di secondo grado ed è $a \neq 0$; dividendo entrambi i membri per $\cos^2 x$ otteniamo:

$3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \tan x = \dfrac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{3} = \dfrac{-\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases}$

da cui $\quad x = 30° + k180° \quad \vee \quad x = -60° + k180°$

2 $\sin^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ $\quad \left[\dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

3 $-\sqrt{3}\cos^2 x + \sin^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\sin x \cos x = 0$ $\quad \left[\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

4 $5\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$ $\quad \left[\dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ \dfrac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

5 $\sin^2 x + 2\cos x \sin x = 0$ $\quad [k180°;\ -63°26'6'' + k180°]$

6 $\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \sin x = 0$ $\quad \left[k\pi;\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

7 $2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$ $\quad \left[k\pi;\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

8 $\sin^2 x - \left(2 + \sqrt{3}\right)\sin x \cos x = 0$ $\quad [k180°;\ 75° + k180°]$

9 $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ $\quad [45° + k180°;\ -71°33'54'' + k180°]$

10 $3\sin^2 x = 2\sin x \cos x + \cos^2 x$ $\quad [45° + k180°;\ -18°26'6'' + k180°]$

11 **ESERCIZIO GUIDATO**

$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$

In questo caso è $a = 0$, dunque non è possibile dividere per $\cos^2 x$.

Puoi però riscrivere l'equazione data in questo modo: $\cos x \left(3\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = 0$

Applica adesso la legge di annullamento del prodotto. $\quad [90° + k180°;\ 120° + k180°]$

12 $3\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ $\quad \left[\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right]$

13 $\cos x \sin x = -\cos^2 x$ $\quad \left[\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

14 $\sin x \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 1 = 2\sin\left(-x - \dfrac{4}{3}\pi\right)\cos x$ $\quad [90° + k180°;\ -69°53'46'' + k180°]$

15 $\cos^2 x - \sqrt{2}\sin x \cos x = 0$ $\quad [90° + k180°;\ 35°15'52'' + k180°]$