

Le equazioni omogenee in seno e coseno

Un'equazione che contiene solo le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ è *omogenea* se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado. In particolare, ci occupiamo delle **equazioni omogenee di secondo grado** che quindi assumono la forma:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Per risolvere questo tipo di equazione dobbiamo distinguere il caso in cui sia $a \neq 0$ oppure $a = 0$.

- Se $a \neq 0$, posto $\cos x \neq 0$, dividendo entrambi i membri per $\cos^2 x$ otteniamo un'equazione di secondo grado di incognita $\tan x$:

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

- Se $a = 0$, non è più possibile dividere per $\cos^2 x$ perché i valori che annullano il coseno sono soluzioni dell'equazione; possiamo però raccogliere $\cos x$ a fattor comune e applicare poi la legge di annullamento del prodotto:

$$\begin{aligned} b \sin x \cos x + c \cos^2 x &= 0 \\ \cos x \cdot (b \sin x + c \cos x) &= 0 \\ \swarrow \quad \quad \quad \searrow & \\ \cos x = 0 \quad \quad \quad b \sin x + c \cos x = 0 & \end{aligned}$$

Primo esempio

Risolviamo l'equazione: $\sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$

Essa è omogenea di secondo grado ed è $a \neq 0$. Dividiamo quindi entrambi i suoi membri per $\cos^2 x$ ottenendo $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$ da cui $\tan x = 1 \quad \vee \quad \tan x = \sqrt{3}$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi: $x = 45^\circ + k180^\circ \quad \vee \quad x = 60^\circ + k180^\circ$.

Secondo esempio

Risolviamo l'equazione: $\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$

Essendo $a = 0$, non possiamo dividere per $\cos^2 x$; raccogliamo $\cos x$ a fattor comune:

$$\cos x (\cos x + \sqrt{3} \sin x) = 0$$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

- $\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0 \quad 1 + \sqrt{3} \tan x = 0 \quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

Anche un'equazione del tipo

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

è omogenea; si tratta di un'equazione omogenea di primo grado che abbiamo già imparato a risolvere come equazione lineare.

ESERCIZI

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$$

L'equazione è omogenea di secondo grado ed è $a \neq 0$; dividendo entrambi i membri per $\cos^2 x$ otteniamo:

$$3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \tan x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{3} = \frac{-\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{da cui } x = 30^\circ + k180^\circ \quad \vee \quad x = -60^\circ + k180^\circ$$

$$2 \sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\left[\frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$3 - \sqrt{3} \cos^2 x + \sin^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cos x = 0$$

$$\left[\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi \right]$$

$$4 \quad 5 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$$

$$\left[\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right]$$

$$5 \quad \sin^2 x + 2 \cos x \sin x = 0$$

$$[k180^\circ; -63^\circ 26' 6'' + k180^\circ]$$

$$6 \quad \sin^2 x - \sqrt{3} \cos x \sin x = 0$$

$$\left[k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right]$$

$$7 \quad 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\left[k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$8 \quad \sin^2 x - (2 + \sqrt{3})\sin x \cos x = 0$$

$$[k180^\circ; 75^\circ + k180^\circ]$$

$$9 \quad \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$$

$$[45^\circ + k180^\circ; -71^\circ 33' 54'' + k180^\circ]$$

$$10 \quad 3 \sin^2 x = 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$[45^\circ + k180^\circ; -18^\circ 26' 6'' + k180^\circ]$$

11 ESERCIZIO GUIDATO

$$3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$$

In questo caso è $a = 0$, dunque non è possibile dividere per $\cos^2 x$.

Puoi però riscrivere l'equazione data in questo modo: $\cos x (3 \cos x + \sqrt{3} \sin x) = 0$

Applica adesso la legge di annullamento del prodotto.

$$[90^\circ + k180^\circ; 120^\circ + k180^\circ]$$

$$12 \quad 3 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right]$$

$$13 \quad \cos x \sin x = -\cos^2 x$$

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$14 \quad \sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 2 \sin\left(-x - \frac{4}{3}\pi\right) \cos x$$

$$[90^\circ + k180^\circ; -69^\circ 53' 46'' + k180^\circ]$$

$$15 \quad \cos^2 x - \sqrt{2} \sin x \cos x = 0$$

$$[90^\circ + k180^\circ; 35^\circ 15' 52'' + k180^\circ]$$