

I POLIEDRI

I PRISMI

richiami della teoria

- Un **poliedro** è la parte di spazio delimitata da poligoni posti su piani diversi in modo tale che ogni lato sia comune a due di essi;
- la **relazione di Eulero** dice che in ogni poliedro convesso la somma del numero delle facce e del numero dei vertici è uguale al numero degli spigoli più due: $f + v = s + 2$;
- il **prisma** è un poliedro costituito da due poligoni congruenti, posti su due piani paralleli e con i lati paralleli, e da tanti parallelogrammi quanti sono i lati di ciascuno dei due poligoni;
- un **prisma retto** ha gli spigoli laterali perpendicolari ai piani delle basi;
- un **prisma regolare** è retto e ha come basi due poligoni regolari;
- il **parallelepipedo** è un prisma che ha come basi due parallelogrammi;
- il **parallelepipedo rettangolo** è un parallelepipedo retto che ha come basi due rettangoli; le sue facce sono a due a due congruenti;
- il **cubo** è un parallelepipedo rettangolo avente le tre dimensioni congruenti e quindi come facce sei quadrati congruenti;
- l'**area della superficie laterale di un prisma retto** è uguale al prodotto del perimetro della base per la misura dell'altezza del prisma; formula diretta: $A_l = 2p \cdot h$; formule inverse: $2p = A_l : h$; $h = A_l : 2p$;
- l'**area della superficie totale di un prisma retto** è uguale alla somma dell'area laterale con il doppio dell'area di una base; formula diretta: $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$; formule inverse: $A_l = A_t - 2 \cdot A_b$; $A_b = (A_t - A_l) : 2$;
- l'**area della superficie di un parallelepipedo rettangolo** è data dalla formula: $A_t = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$;
- la **misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo** è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle misure delle sue tre dimensioni: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;
- l'**area della superficie laterale e totale di un cubo** sono date rispettivamente dal prodotto dell'area di una faccia per 4 e per 6; formule dirette: $A_l = 4 \cdot l^2$; $A_t = 6 \cdot l^2$; formule inverse: $l = \sqrt{A_l : 4}$; $l = \sqrt{A_t : 6}$;
- la **misura della diagonale di un cubo** è uguale al prodotto della misura dello spigolo per $\sqrt{3}$; formula diretta: $d = l \cdot \sqrt{3}$; formula inversa: $l = d : \sqrt{3}$ (con $\sqrt{3} = 1,732$).

COMPrensione della teoria

- 1 Completa la seguente definizione:
un poliedro è la parte di delimitata da posti su piani diversi in modo tale che ogni sia in comune a due di essi.

2 Completa le seguenti definizioni:

- la relazione di Eulero dice che in un la somma del numero delle e del numero dei vertici è uguale al numero di più due;
- il prisma è un costituito da due poligoni, posti su due piani e con i lati e da tanti quanti sono i lati di ciascuno dei due poligoni;
- un prisma è retto se sono ai piani delle basi;
- un prisma è regolare se è e ha come basi

3 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere o false:

- un prisma è un parallelepipedo se le sue basi sono due parallelogrammi;
- il parallelepipedo rettangolo è un parallelepipedo retto che ha per base un trapezio rettangolo;
- il parallelepipedo rettangolo è un parallelepipedo retto che ha per basi due rettangoli;
- le facce del parallelepipedo rettangolo sono rettangoli a due a due congruenti;
- le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono i tre spigoli aventi lo stesso vertice in comune.

V F

V F

V F

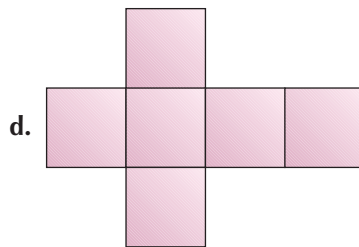
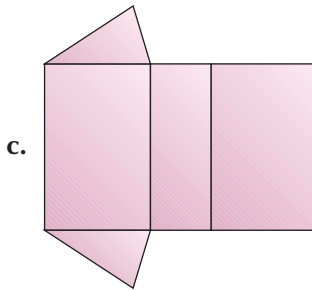
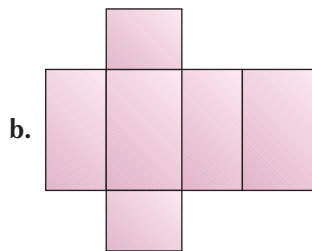
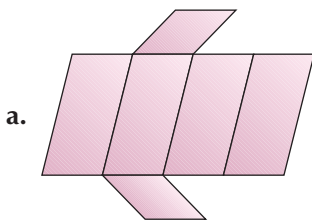
V F

V F

4 Completa la seguente definizione:

un cubo è un avente le 3 dimensioni

5 Indica quale poliedro genera ciascuno dei seguenti sviluppi.



6 Qual è la formula per calcolare l'area della superficie laterale del prisma retto?

7 Quali delle seguenti formule per calcolare l'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo sono corrette?

- a. $A_t = a \cdot b \cdot 2 + 2(a + b) \cdot c$; b. $A_t = a \cdot b + a \cdot b \cdot c$; c. $A_t = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$.

8 Qual è la formula per calcolare l'area della superficie totale di un cubo?

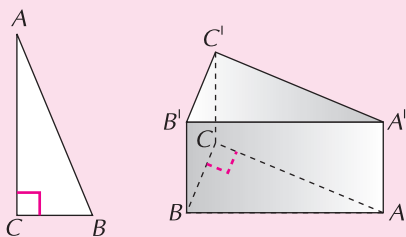
APPLICAZIONE

9 Verifica la relazione di Eulero nel caso di una piramide a base quadrata e di un prisma a base esagonale.

10 Un poliedro ha 6 facce e 8 vertici; quanti sono gli spigoli?

11 *Esercizio Svolto*

La base di un prisma retto è un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 24 cm e 10 cm. Calcola l'area della superficie totale sapendo che l'altezza del prisma misura 8 cm.



Dati	Incognita
$\overline{AC} = 24 \text{ cm}$	A_t
$\overline{BC} = 10 \text{ cm}$	
$\overline{AA'} = 8 \text{ cm}$	

Determiniamo l'area del triangolo rettangolo di base: $A_b = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} = \left(\frac{24 \cdot 10}{2}\right) \text{ cm}^2 = 120 \text{ cm}^2$

Per calcolare l'area della superficie laterale abbiamo bisogno del perimetro di base e dobbiamo quindi calcolare la misura dell'ipotenusa applicando il teorema di Pitagora.

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} \text{ cm} = \sqrt{576 + 100} \text{ cm} = \sqrt{676} \text{ cm} = 26 \text{ cm}$$

$$2p_{(ABC)} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = (26 + 24 + 10) \text{ cm} = 60 \text{ cm}$$

$$A_l = 2p \cdot \overline{AA'} = (60 \cdot 8) \text{ cm}^2 = 480 \text{ cm}^2$$

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = (480 + 2 \cdot 120) \text{ cm}^2 = 720 \text{ cm}^2$$

- 12** La base di un prisma retto è un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa e un cateto che misurano rispettivamente 55 cm e 33 cm. Calcola l'area della superficie totale sapendo che l'altezza misura 12 cm. [3036 cm²]

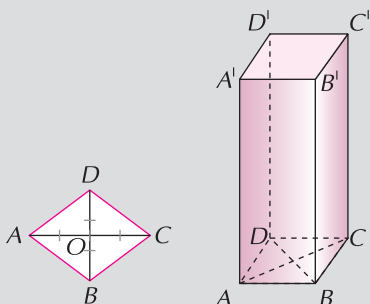
- 13** Un trapezio isoscele con la base maggiore, la base minore e il lato obliquo lunghi rispettivamente 38 cm, 20 cm e 15 cm è la base di un prisma retto. Calcola l'area della superficie totale del prisma sapendo che l'altezza del solido è $\frac{5}{4}$ dell'altezza del prisma. [2016 cm²]

- 14** In un trapezio rettangolo la somma delle due basi è 55 cm, una è $\frac{5}{6}$ dell'altra e il lato obliquo misura 13 cm. Calcola l'area della superficie totale di un prisma retto che ha per base il trapezio rettangolo sapendo che l'altezza del prisma è 18 cm. [2100 cm²]

- 15** Un prisma retto ha per base un rombo. Calcola l'area della superficie totale del prisma sapendo che le diagonali della base misurano 36 cm e 48 cm e l'altezza del prisma è lunga 10 cm. [2928 cm²]

16 *Esercizio Guidato*

L'area di base di un prisma retto a base rombica è 96 cm². Determina l'area della superficie totale del prisma sapendo che le diagonali di base sono una $\frac{3}{4}$ dell'altra e che l'altezza misura 27 cm.



Dati	Incognita
$A_b = 96 \text{ cm}^2$	A_t
$BD = \frac{3}{4} \cdot AC$	
$\overline{AA'} = 27 \text{ cm}$	

Per calcolare l'area della superficie laterale abbiamo bisogno del perimetro.

Nel rombo si evidenziano $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ di uguale

$$A_{\text{quadrato}} = A_b : \dots = (\dots : \dots) \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$$

$$\text{lato quadrato } \sqrt{A} = \sqrt{16} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

$$\overline{BD} = (4 \cdot 3) \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = (\dots \cdot 4) \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2} \text{ cm} = \sqrt{6^2 + 8^2} \text{ cm} = \sqrt{100} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$2p_{(ABCD)} = \overline{AB} \cdot \dots = (\dots \cdot \dots) \text{ cm} = 40 \text{ cm}$$

$$A_l = 2p_{(ABCD)} \cdot \dots = (\dots \cdot \dots) \text{ cm}^2 = \dots$$

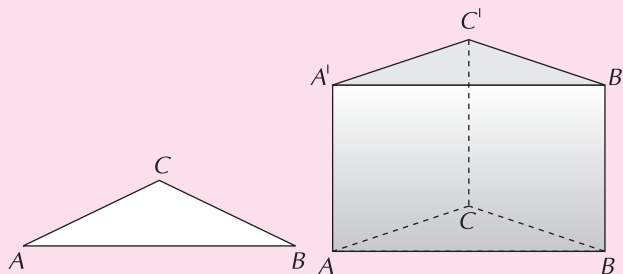
$$A_t = \dots + \dots \cdot A_b = (\dots + 2 \cdot \dots) \text{ cm}^2 = 1272 \text{ cm}^2$$

- 17** L'area di base di un prisma retto a base triangolare è 432 cm^2 . Determina l'area della superficie totale del prisma sapendo che il triangolo è isoscele, la base è $\frac{2}{3}$ dell'altezza e l'altezza del prisma misura 41 cm . [4959,08 cm²]

- 18** Un prisma retto ha per base un triangolo rettangolo i cui cateti sono uno $\frac{5}{12}$ dell'altro. Calcola l'area della superficie totale del prisma sapendo che l'area di base è 750 dm^2 e l'altezza del prisma è $\frac{15}{13}$ dell'ipotenusa. [12750 dm²]

19 *Esercizio Svolto*

Un triangolo isoscele la cui base misura 36 dm e il cui lato obliquo è $\frac{5}{9}$ della base è la base di un prisma retto che ha l'area della superficie laterale uguale a 1672 dm^2 . Calcola l'altezza del prisma.



Dati	Incognita
$\overline{AB} = 36 \text{ dm}$	$\overline{AA'}$
$BC = \frac{5}{9} \cdot AB$	
$A_l = 1672 \text{ dm}^2$	

Calcoliamo la misura del lato obliquo del triangolo: $\overline{BC} = \frac{5}{9} \cdot \overline{AB} = \left(\frac{5}{9} \cdot 36\right) \text{ dm} = 20 \text{ dm}$

$$2p_{(ABC)} = \overline{AB} + \overline{BC} \cdot 2 = (36 + 20 \cdot 2) \text{ dm} = 76 \text{ dm}$$

$$\overline{AA'} = A_l : 2p = (1672 : 76) \text{ dm} = 22 \text{ dm}$$

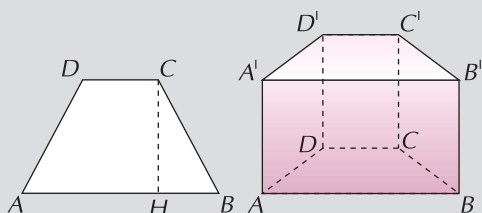
- 20** Un prisma retto con l'area della superficie totale uguale a 1360 dm^2 , ha per base un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 8 dm e 15 dm . Calcola la misura dell'altezza del prisma. [31 cm]

- 21** Il perimetro di base di un parallelepipedo rettangolo è 96 cm e una dimensione è $\frac{5}{7}$ dell'altra. Calcola l'area della superficie totale del parallelepipedo sapendo che l'altezza misura 19 cm. [2944 cm²]
(Suggerimento: il parallelepipedo rettangolo è un prisma retto che ha per basi due rettangoli)

- 22** La somma delle tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo è 117 dm. Calcola l'area della superficie totale del parallelepipedo sapendo che due dimensioni della base sono una $\frac{3}{4}$ dell'altra e che l'altezza del solido è lunga 26 dm. [8788 dm²]

23 *Esercizio Guidato*

L'area della superficie totale di un prisma retto che ha per base un trapezio isoscele è 2430 cm² e l'area di base è 270 cm². Calcola la misura dell'altezza del prisma sapendo che la base maggiore e la base minore del trapezio misurano rispettivamente 26 cm e 10 cm.



Dati	Incognita
$A_t = 2430 \text{ cm}^2$	$\overline{AA'}$
$A_b = 270 \text{ cm}^2$	
$\overline{AB} = 26 \text{ cm}$	
$\overline{DC} = 10 \text{ cm}$	

Per poter determinare la misura dell'altezza dobbiamo calcolare l'area della superficie laterale e il perimetro di base.

$$A_l = A_t - 2 \cdot A_b = (\dots - 2 \cdot \dots) \text{ cm}^2 = \dots \text{ cm}^2$$

Operiamo ora sugli elementi della base per calcolare il perimetro:

$$\overline{CH} = 2 \cdot A_b : (\dots + \dots) = [2 \cdot 270 : (\dots + \dots)] \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

$$\overline{HB} = (\overline{AB} - \overline{CD}) : 2 = [(26 - 10) : 2] \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{\dots + \dots} \text{ cm} = \sqrt{225 + 64} \text{ cm} = \sqrt{289} \text{ cm} = 17 \text{ cm}$$

$$2p_{(ABCD)} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = (26 + 17 + 10 + 17) \text{ cm} = 70 \text{ cm}$$

$$\overline{AA'} = A_l : 2p = (\dots : \dots) \text{ cm} = 27 \text{ cm}$$

- 24** Un prisma retto ha per base un triangolo rettangolo i cui cateti sono uno $\frac{3}{4}$ dell'altro. Calcola l'area della superficie totale sapendo che l'area della superficie laterale è 432 cm² e che l'altezza del prisma e l'ipotenusa misurano rispettivamente 12 cm e 15 cm. [540 cm²]

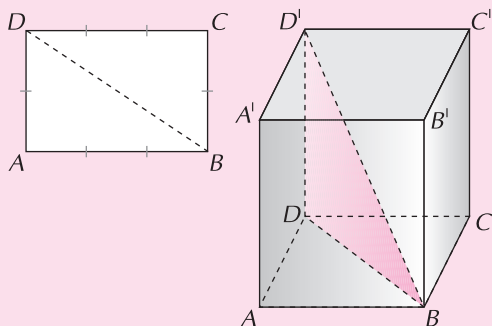
- 25** L'area della superficie laterale di un parallelepipedo rettangolo è 3600 cm² e le due dimensioni sono una $\frac{2}{7}$ dell'altra. Calcola l'area della superficie totale sapendo che l'altezza del solido è 25 cm. [5392 cm²]

- **26** L'area della superficie totale di un prisma retto a base rombica è 1800 cm² e l'area di base è $\frac{1}{13}$ dell'area laterale. Calcola la misura dell'altezza del prisma sapendo che una diagonale è lunga 10 cm. [30 cm]

- **27** Un trapezio isoscele, avente la base maggiore, la base minore e l'altezza lunghe rispettivamente 85 cm, 25 cm e 40 cm, è la base di un prisma retto. Calcola quanto è alto il prisma sapendo che l'area della superficie totale è di 21 200 cm². [80 cm]

28 *Esercizio Svolto*

L'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo è 708 cm^2 . Calcola la misura delle tre dimensioni e della diagonale sapendo che il perimetro di base è 30 cm e una dimensione è $\frac{2}{3}$ dell'altra.



Dati	Incognite
$A_t = 708 \text{ cm}^2$	$\overline{AB}, \overline{BC}$
$2p_{(ABCD)} = 30 \text{ cm}$	$\overline{AA'}, \overline{BD'}$
$BC = \frac{2}{3} \cdot AB$	

Della base $ABCD$ conosciamo il perimetro e il rapporto fra i lati; calcoliamo la misura dei lati AB e BC :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 2p : 2 = (30 : 2) \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = [(15 : 5) \cdot 2] \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = [(15 : 5) \cdot 3] \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

A partire dall'area della superficie totale determiniamo per differenza l'area della superficie laterale per poi calcolare la misura dell'altezza.

$$A_b = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = (9 \cdot 6) \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2$$

$$A_l = A_t - 2 \cdot A_b = (708 - 2 \cdot 54) \text{ cm}^2 = 600 \text{ cm}^2$$

$$\overline{AA'} = A_l : 2p = (600 : 30) \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

Calcoliamo infine la misura della diagonale note le misure delle 3 dimensioni.

$$d = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DD'}^2} = \sqrt{9^2 + 6^2 + 20^2} \text{ cm} = \sqrt{517} \text{ cm} = 22,7 \text{ cm}$$

29 L'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo è 2124 dm^2 . Calcola la misura delle tre dimensioni e della diagonale sapendo che il perimetro di base è 66 dm e una dimensione è $\frac{5}{6}$ dell'altra. [15 dm; 18 dm; 24 dm; 33,54 dm]

30 L'area della superficie totale e di base di un parallelepipedo rettangolo sono rispettivamente 1606 cm^2 e 153 cm^2 . Determina la misura dell'altezza e della diagonale del parallelepipedo sapendo che una delle due dimensioni di base misura 9 cm . [25 cm; 31,54 cm]

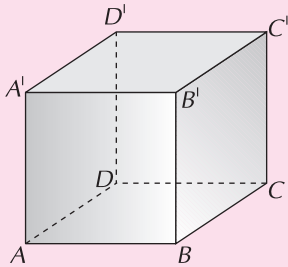
31 Il lato di un cubo è lungo 45 cm . Calcola l'area della superficie laterale e totale. [8100 cm²; 12150 cm²]

32 Un cubo ha la misura dello spigolo di 12 cm . Calcola l'area della superficie totale e la misura della diagonale. [864 cm²; 20,784 cm]

33 Un cubo ha la misura dello spigolo di 15 cm . Calcola l'area della superficie laterale e la misura della diagonale. [900 cm²; 25,98 cm]

34 *Esercizio Svolto*

Un cubo ha l'area della superficie totale di 1536 cm^2 . Calcola la misura dello spigolo.



Dato	Incognita
$A_t = 1536 \text{ cm}^2$	\overline{AB}

Per calcolare la misura dello spigolo, basta applicare la formula inversa:

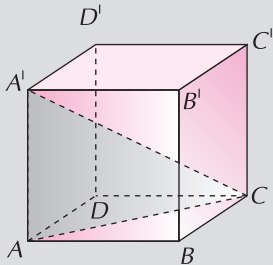
$$\overline{AB} = \sqrt{A_t : 6} = \sqrt{1536 : 6} \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

35 Un cubo ha l'area della superficie laterale di 3136 cm^2 . Calcola la misura dello spigolo. [28 cm]

36 Un cubo ha l'area della superficie totale di 6144 cm^2 . Calcola l'area della superficie laterale. [4096 cm²]

37 *Esercizio Guidato*

La diagonale di un cubo misura $39,836 \text{ dm}$. Calcola l'area della superficie totale del cubo.



Dato	Incognita
$\overline{A'C} = 39,836 \text{ dm}$	A_t

$$\overline{AB} = \overline{A'C} : \sqrt{3} = (39,836 : \dots\dots) \text{ dm} = \dots \text{ dm}$$

$$A_t = \dots \cdot A_b = (6 \cdot \dots) \text{ dm}^2 = \dots \text{ dm}^2$$

[3174 cm²]

● **38** La diagonale di un cubo misura $27,712 \text{ cm}$. Calcola le misure delle dimensioni di un parallelepipedo rettangolo avente la stessa superficie totale del cubo sapendo che le dimensioni di base sono una $\frac{1}{3}$ dell'altra e l'area di base è 48 cm^2 .

[12 cm; 4 cm; 45 cm]

LA PIRAMIDE E I POLIEDRI REGOLARI

richiami della teoria

- La **piramide** è la parte di una piramide indefinita compresa fra una sezione piana e il vertice;
- una **piramide** è **retta** se nella base si può inscrivere una circonferenza e il piede dell'altezza coincide con il centro di questa circonferenza;
- l'**apotema di una piramide retta** è l'altezza di uno qualunque dei triangoli che costituiscono le sue facce laterali; l'**apotema di base** è il raggio della circonferenza inscritta e si calcola dividendo l'area del poligono di base per il semiperimetro: $r = A : p$;
- una **piramide** è **regolare** se è retta e se ha come base un poligono regolare;
- l'**area della superficie laterale di una piramide retta** è uguale al prodotto del semiperimetro della base per la misura dell'apotema; formula diretta: $A_l = p \cdot a$; formule inverse: $p = A_l : a$; $a = A_l : p$;
- l'**area della superficie totale di una piramide retta** è uguale alla somma dell'area laterale con l'area della base; formula diretta: $A_t = A_l + A_b$; formule inverse: $A_l = A_t - A_b$; $A_b = A_t - A_l$;
- un **poliedro** è **regolare** se tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti fra di loro e i suoi diedri e i suoi angolidi sono congruenti fra loro;
- l'**area della superficie dei poliedri regolari** è uguale al prodotto del numero di facce per il quadrato della misura del lato per il relativo numero fisso.

COMPRESIONE DELLA TEORIA

- 39** Completa le seguenti definizioni:
- a. la piramide è la parte di una compresa fra una sua e il
 - b. una piramide si dice retta se nella base si può una circonferenza e coincide con il centro di questa circonferenza;
 - c. una piramide si dice regolare se è e se ha come base un

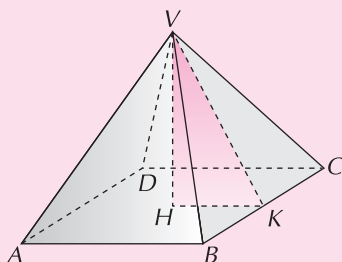
40 Quale formula permette di calcolare l'area della superficie laterale della piramide retta?

41 Quali poliedri regolari esistono?

APPLICAZIONE

42 *Esercizio Svolto*

Una piramide quadrangolare regolare ha lo spigolo di base e l'altezza che misurano rispettivamente 16 cm e 6 cm. Calcola l'area della superficie totale.



Dati	Incognita
$\overline{AB} = 16 \text{ cm}$	A_t
$\overline{VH} = 6 \text{ cm}$	

Per determinare l'area della superficie laterale dobbiamo prima calcolare la misura dell'apotema VK applicando il teorema di Pitagora al triangolo VHK .

$$\overline{HK} = \overline{AB} : 2 = (16 : 2) \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{VK} = \sqrt{\overline{VH}^2 + \overline{HK}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} \text{ cm} = \sqrt{36 + 64} \text{ cm} = \sqrt{100} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$A_l = \frac{2p_{(ABCD)} \cdot \overline{VK}}{2} = \frac{(4 \cdot 16) \cdot 10}{2} \text{ cm}^2 = 320 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \overline{AB}^2 = 16^2 \text{ cm}^2 = 256 \text{ cm}^2$$

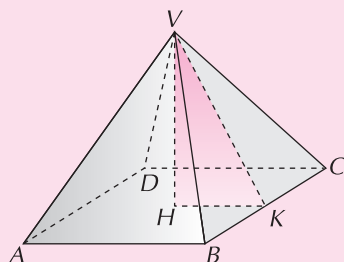
$$A_t = A_b + A_l = (256 + 320) \text{ cm}^2 = 576 \text{ cm}^2$$

- 43** Una piramide quadrangolare regolare ha lo spigolo di base e l'altezza che misurano rispettivamente 20 cm e 24 cm. Calcola l'area della superficie totale. [1 440 cm²]

- 44** Una piramide quadrangolare regolare ha l'area di base di 1 024 cm² e l'altezza lunga 30 cm. Calcola l'area della superficie totale. [3 200 cm²]

45 *Esercizio Svolto*

Calcola la misura dell'apotema di una piramide quadrangolare regolare sapendo che l'area della superficie totale è 864 cm² e lo spigolo di base è lungo 18 cm.



Dati	Incognita
$A_t = 864 \text{ cm}^2$	\overline{VK}
$\overline{AB} = 18 \text{ cm}$	

Calcoliamo l'area di base e poi l'area della superficie laterale sottraendo quest'ultima dall'area totale.

$$A_b = \overline{AB}^2 = 18^2 \text{ cm}^2 = 324 \text{ cm}^2$$

$$A_l = A_t - A_b = (864 - 324) \text{ cm}^2 = 540 \text{ cm}^2$$

Dopo aver calcolato il perimetro di base applichiamo la formula inversa dell'area della superficie totale per calcolare la misura dell'apotema.

$$2p_{(ABCD)} = \overline{AB} \cdot 4 = (18 \cdot 4) \text{ cm} = 72 \text{ cm}$$

$$\overline{VK} = \frac{A_l \cdot 2}{2p} = \frac{540 \cdot 2}{72} \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

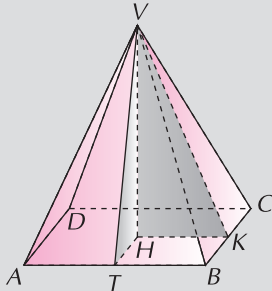
- 46** Calcola la misura dell'apotema di una piramide quadrangolare regolare sapendo che l'area della superficie totale è 2856 cm² e lo spigolo di base è lungo 34 cm. [25 cm]

- 47** Calcola la misura dello spigolo di base e l'area della superficie totale di una piramide quadrangolare regolare sapendo che l'area della superficie laterale è 756 cm² e l'apotema è lungo 18 cm.

[21 cm; 1 197 cm²]

48 *Esercizio Guidato*

Una piramide a base rettangolare con il piede dell'altezza nel punto di incontro delle diagonali di base è alta 8 cm. Calcola l'area della superficie totale sapendo che il perimetro di base è 84 cm e una dimensione è $\frac{2}{5}$ dell'altra.



Dati	Incognita
$\overline{VH} = 8 \text{ cm}$	A_t
$2p_{(ABCD)} = 84 \text{ cm}$	
$BC = \frac{2}{5} \cdot AB$	

Per calcolare l'area della superficie laterale dobbiamo calcolare l'area delle singole facce laterali perché la piramide non è retta.

Determiniamo le dimensioni del rettangolo di base:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 2p : 2 = (84 : 2) \text{ cm} = 42 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = [(42 : \dots) \cdot \dots] \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = [(42 : \dots) \cdot \dots] \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

Calcoliamo la misura degli apotemi VK e VT considerando i triangoli rettangoli VHK e VHT .

$$\overline{VK} = \sqrt{\overline{VH}^2 + \overline{HK}^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} \text{ cm} = \sqrt{64 + 225} \text{ cm} = \sqrt{289} \text{ cm} = 17 \text{ cm}$$

$$\overline{VT} = \sqrt{\overline{VH}^2 + \overline{HT}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} \text{ cm} = \sqrt{64 + 36} \text{ cm} = \sqrt{100} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

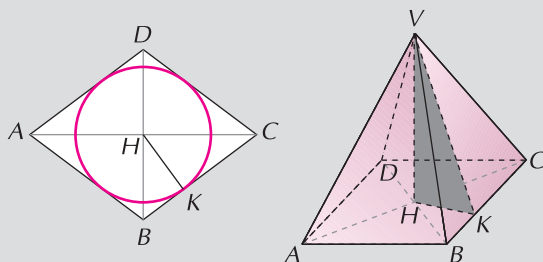
$$A_t = A_b + 2 \cdot A_{(ABV)} + 2 \cdot A_{(BCV)} = \overline{AB} \cdot \dots + 2 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \dots}{\dots} + 2 \cdot \frac{\dots \cdot \dots}{\dots} =$$

$$= \left(\dots \cdot \dots + 2 \cdot \frac{\dots \cdot \dots}{2} + 2 \cdot \frac{\dots \cdot \dots}{2} \right) \text{ cm}^2 = 864 \text{ cm}^2$$

- **49** Una piramide a base rettangolare con il piede dell'altezza nel punto d'incontro delle diagonali di base è alta 12 cm. Calcola l'area della superficie totale sapendo che il perimetro di base è 56 cm e una dimensione è $\frac{5}{9}$ dell'altra. [564 cm²]

50 *Esercizio Guidato*

L'altezza di una piramide retta a base rombica misura 10 cm. Calcola l'area della superficie totale sapendo che l'area di base è 2400 cm² e la diagonale minore della base misura 60 cm.



Dati	Incognita
$\overline{VH} = 10 \text{ cm}$	A_t
$A_b = 2400 \text{ cm}^2$	
$\overline{BD} = 60 \text{ cm}$	

Per determinare la misura del lato del rombo AB dobbiamo applicare il teorema di Pitagora sul triangolo rettangolo AHB ; mentre per determinare la misura dell'apotema \overline{VK} dobbiamo applicare lo stesso teorema al triangolo VHK . Calcoliamo gli elementi della base:

$$\overline{AC} = 2 \cdot A_b : \dots = [2 \cdot \dots : \dots] \text{ cm} = 80 \text{ cm}$$

$$\overline{HB} = \overline{DB} : 2 = (\dots : 2) \text{ cm} = \dots \text{ cm} \quad \overline{AH} = \dots : 2 = (\dots : 2) \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} \text{ cm} = \sqrt{900 + 1600} \text{ cm} = \sqrt{2500} \text{ cm} = 50 \text{ cm}$$

Per calcolare la misura dell'apotema VK è necessario conoscere la lunghezza del segmento HK che è il della circonferenza inscritta e corrisponde all'altezza del triangolo rettangolo BHC relativa all'ipotenusa BC .

$$\overline{HK} = \frac{\dots \cdot \overline{HC}}{\overline{BC}} = \frac{\dots \cdot \dots}{\dots} \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

$$\overline{VK} = \sqrt{\overline{HK}^2 + \dots} = \sqrt{\dots + \dots} \text{ cm} = \sqrt{\dots + \dots} \text{ cm} = \sqrt{\dots} \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

$$\text{Possiamo ora calcolare } A_l = 2p_{(ABCD)} \cdot \overline{VK} : 2 = [(4 \cdot \dots) \cdot \dots : 2] \text{ cm}^2 = \dots \text{ cm}^2$$

$$A_t = A_l + A_b = (2600 + 2400) \text{ cm}^2 = 5000 \text{ cm}^2$$

51 L'altezza di una piramide retta a base rombica è lunga 16,2 dm. Calcola l'area della superficie totale sapendo che l'area di base è 1944 dm^2 e una diagonale misura 54 dm. [4374 dm²]

52 Calcola l'area della superficie totale di un tetraedro regolare il cui spigolo è lungo 36 cm. [2244,672 cm²]

53 Un dodecaedro regolare ha l'area della superficie totale di 8256 cm^2 . Calcola la misura dello spigolo. [20 cm]

54 Un poliedro regolare ha l'area della superficie di $17\,536,5 \text{ cm}^2$. Sapendo che il suo spigolo misura 45 cm, di che poliedro si tratta? [icosaedro]

I SOLIDI EQUIVALENTI

richiami della teoria

- Il **volume** di un corpo consiste nella parte di spazio che il corpo occupa;
- i due solidi **equivalenti** hanno lo stesso volume;
- **principio di Cavalieri**: due solidi equivalenti si possono disporre, rispetto ad un piano, in modo che ogni piano parallelo a questo li intersechi secondo sezioni equivalenti;
- **misurare il volume di un solido** significa confrontarlo con un altro solido scelto come unità di misura e stabilire quante volte quest'ultimo è contenuto nel primo;
- il **volume del parallelepipedo rettangolo** è uguale al prodotto delle misure delle tre dimensioni; formula diretta: $V = a \cdot b \cdot c$ oppure $V = A_b \cdot h$; formule inverse: $A_b = V : h$; $h = V : A_b$;
- il **volume del prisma retto** è uguale al prodotto dell'area della base per la misura dell'altezza; formula diretta: $V = A_b \cdot h$; formule inverse: $A_b = V : h$; $h = V : A_b$;
- il **volume del cubo** è uguale alla terza potenza della misura del suo spigolo; formula diretta: $V = \ell^3$; formula inversa: $\ell = \sqrt[3]{V}$;
- la **piramide** è equivalente alla terza parte di un prisma avente la base equivalente e l'altezza congruente a quella della piramide; formula diretta: $V = A_b \cdot h : 3$; formule inverse $A_b = 3 \cdot V : h$; $h = 3 \cdot V : A_b$;
- il **volume di un poliedro regolare** è uguale al prodotto del cubo della misura dello spigolo per il numero fisso; formula diretta: $V = l^3 \cdot n$; formula inversa: $l = \sqrt[3]{\frac{V}{n}}$;
- il **peso specifico** di un corpo è dato dal rapporto fra il peso e il volume; formula diretta $P_s = \frac{P}{V}$; formule inverse $P = P_s \cdot V$; $V = \frac{P}{P_s}$.

COMPRESIONE DELLA TEORIA

55 Quando due solidi si dicono equivalenti?

56 Collega ogni solido con la formula per calcolare il suo volume:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| a. cubo | ① $a \cdot b \cdot c$ |
| b. parallelepipedo rettangolo | ② $\frac{A_b \cdot h}{3}$ |
| c. prisma retto | ③ l^3 |
| d. piramide | ④ $A_b \cdot h$ |

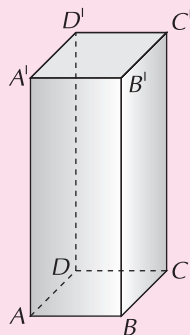
57 Collega ogni solido con la formula che permette di calcolare la misura del lato noto il volume:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------------|
| a. cubo | ① $\ell = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{h}}$ |
| b. piramide quadrangolare | ② $\ell = \sqrt[3]{\frac{V}{n}}$ |
| c. poliedro regolare | ③ $\ell = \sqrt[3]{V}$ |

APPLICAZIONE

58 *Esercizio Svolto*

L'area della superficie laterale di un prisma retto a base quadrata è 2352 cm^2 . Calcola il volume del prisma sapendo che l'altezza misura 42 cm .



Dati	Incognita
$A_l = 2352 \text{ cm}^2$	V
$\overline{AA'} = 42 \text{ cm}$	

Per poter calcolare il volume abbiamo bisogno dell'area di base, quindi calcoliamo il perimetro di base e poi la misura dello spigolo applicando la formula inversa dell'area della superficie laterale.

$$2p_{(ABCD)} = A_l : \overline{AA'} = (2352 : 42) \text{ cm} = 56 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = 2p : 4 = (56 : 4) \text{ cm} = 14 \text{ cm}$$

$$A_b = \overline{AB}^2 = 14^2 \text{ cm}^2 = 196 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot \overline{AA'} = (196 \cdot 42) \text{ cm}^3 = 8232 \text{ cm}^3$$

59 L'area di base di un prisma retto a base quadrata è 784 cm^2 e l'altezza è $\frac{9}{7}$ dello spigolo di base. Calcola il volume del prisma. [28 224 cm³]

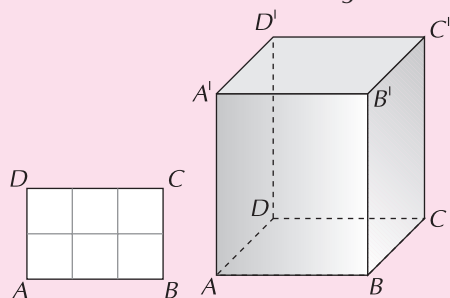
60 Le diagonali di base di un prisma retto a base rombica misurano rispettivamente 48 dm e 28 dm . Calcola il volume del prisma sapendo che la sua altezza misura 25 dm . [16 800 dm³]

61 L'area della superficie laterale di un prisma retto a base triangolare è 1620 cm^2 . Calcola il volume del prisma sapendo che la base è un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 12 cm e 5 cm . [1 620 cm³]

62 Calcola il volume di un parallelepipedo rettangolo sapendo che l'altezza misura 45 cm , che il perimetro di base è 126 cm e le due dimensioni sono una $\frac{3}{4}$ dell'altra. [43 740 cm³]

63 *Esercizio Svolto*

Il volume di un parallelepipedo rettangolo è 12672 cm^3 . Calcola la misura delle due dimensioni di base sapendo che sono una $\frac{2}{3}$ dell'altra e che l'altezza misura 33 cm .



Dati	Incognita
$V = 12672 \text{ cm}^3$	\overline{AB}
$BC = \frac{2}{3} \cdot AB$	\overline{BC}
$\overline{AA'} = 33 \text{ cm}$	

Calcoliamo l'area di base applicando la formula inversa del volume:

$$A_b = V : \overline{AA'} = (12672 : 33) \text{ cm}^2 = 384 \text{ cm}^2$$

Nella superficie di base si evidenziano $3 \cdot 2 = 6$ quadrati di ugual superficie, ciascuno con area uguale a:

$$A_{\text{quadrato}} = A_b : 6 = (384 : 6) \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$$

$$\text{lato quadrato } \sqrt{A_{\text{quadrato}}} = \sqrt{64} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = (8 \cdot 3) \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = (8 \cdot 2) \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

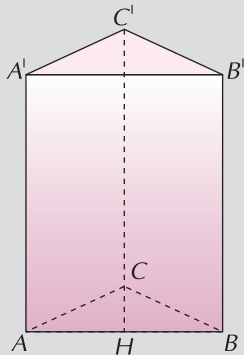
64 Il volume di un parallelepipedo rettangolo è 26320 cm^3 . Calcola la misura delle due dimensioni di base sapendo che sono una $\frac{5}{7}$ dell'altra e che l'altezza misura 47 cm . [20 cm; 28 cm]

65 L'area di base e della superficie laterale di un parallelepipedo rettangolo sono rispettivamente 1815 cm^2 e 12672 cm^2 . Calcola il volume del parallelepipedo sapendo che le dimensioni di base sono una $\frac{3}{5}$ dell'altra. [130680 cm^3]

66 Un cubo con lo spigolo lungo 42 cm è equivalente ad una piramide quadrangolare regolare alta 56 cm . Calcola l'area della superficie totale della piramide. [12064,5 cm^2]

67 *Esercizio Guidato*

Un prisma retto ha per base un triangolo isoscele con la base pari a $\frac{16}{17}$ del lato obliquo. Calcola il volume del solido sapendo che l'area della superficie laterale e la misura dell'altezza sono rispettivamente 4200 cm^2 e 42 cm .



Dati	Incognita
$AB = \frac{16}{17} \cdot BC$	V
$A_l = 4200 \text{ cm}^2$	
$\overline{AA'} = 42 \text{ cm}$	

Calcoliamo il perimetro applicando la formula inversa dell'area della superficie laterale

$$2p = A_l : \dots = (\dots : 42) \text{ cm} = 100 \text{ cm}$$

Determiniamo la lunghezza dei lati

$$\overline{AB} = 16 \cdot [2p : (16 + 17 + \dots)] = [16 \cdot (100 : 50)] \text{ cm} = 32 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = 17 \cdot [2p : (\dots + \dots + \dots)] = [17 \cdot (\dots : \dots)] \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

Calcoliamo la misura dell'altezza \overline{CH} applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo HBC .

$$\overline{HB} = \overline{AB} : 2 = (\dots : 2) \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \dots} = \sqrt{\dots - \dots} \text{ cm} = 30 \text{ cm}$$

$$A_b = \overline{AB} \cdot \dots : 2 = (32 \cdot \dots : 2) \text{ cm}^2 = \dots \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot \overline{AA'} = (\dots \cdot \dots) \text{ cm}^3 = 20160 \text{ cm}^3$$

68 Un prisma retto ha per base un triangolo isoscele con il lato obliquo pari a $\frac{13}{10}$ dalla base. Calcola il

volume del solido sapendo che l'area della superficie laterale e la misura dell'altezza sono rispettivamente 5616 cm^2 e 52 cm . [28080 cm^3]

69 Un prisma retto ha per base un triangolo rettangolo con i cateti lunghi rispettivamente $20,8 \text{ cm}$ e $15,6 \text{ cm}$. Calcola il volume del prisma sapendo che l'area della superficie laterale è 1872 cm^2 . [4867,2 cm^3]

70 Un parallelepipedo rettangolo ha l'area della superficie laterale di 26880 cm^2 e l'altezza lunga 192 cm . Calcola la misura dello spigolo di un cubo equivalente al parallelepipedo sapendo che le dimensioni di base di quest'ultimo sono una $\frac{5}{9}$ dell'altra. [60 cm]

71 Un parallelepipedo rettangolo è equivalente ad un cubo con lo spigolo lungo 24 cm . Calcola l'area della superficie totale del parallelepipedo sapendo che l'altezza misura 27 cm e una dimensione di base è doppia dell'altra. [3616 cm^2]

72 L'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo è 1550 dm^2 e due dimensioni sono rispettivamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{3}$ della terza. Calcola il volume del solido. [3750 dm^3]

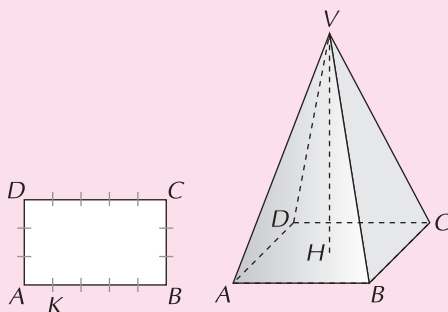
73 Un parallelepipedo rettangolo ha l'area della superficie laterale di 8526 cm^2 e l'altezza lunga 49 cm . Calcola la misura dello spigolo di un cubo equivalente al parallelepipedo sapendo che le dimensioni di base di quest'ultimo sono una $\frac{8}{21}$ dell'altra. [42 cm]

74 In un parallelepipedo rettangolo, con le dimensioni di base lunghe 36 cm e 30 cm e l'altezza che misura 72 cm , è stata praticata una cavità a forma di parallelepipedo rettangolo che lo trapassa per tutta l'altezza da parte a parte. Il foro è pari a $\frac{1}{3}$ del volume del parallelepipedo e le sue dimensioni sono una $\frac{2}{5}$ dell'altra. Determina l'area della superficie del solido così ottenuto. [16992 cm^2]

75 Un cubo di rame ($P_s = 8,8$), avente lo spigolo lungo 15 dm viene fuso con un prisma pentagonale di zinco ($P_s = 6,8$) avente l'area della superficie laterale di 600 dm^2 e l'altezza che misura 12 dm . Dalla fusione dei due solidi si ottiene un prisma esagonale regolare avente l'area di base di 259 dm^2 . Calcola la misura dell'altezza del prisma e il suo peso. [21 dm ; 43735,2 kg]

76 *Esercizio Svolto*

Una piramide retta ha per base un rettangolo il cui perimetro è 80 cm e con le dimensioni una $\frac{3}{5}$ dell'altra. Calcola il volume della piramide sapendo che l'altezza misura 36 cm .



Dati	Incognita
$2p_{(ABCD)} = 80 \text{ cm}$	V
$BC = \frac{3}{5} \cdot AB$	
$\overline{VH} = 36 \text{ cm}$	

Dalla rappresentazione della base si capisce che il perimetro è formato da $3 + 5 + 3 + 5 = 16$ segmenti unitari ciascuno dei quali misura:

$$\overline{AK} = (80 : 16) \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{pertanto } \overline{BC} = (3 \cdot 5) \text{ cm} = 15 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \overline{AB} = (5 \cdot 5) \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

$$A_b = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = (25 \cdot 15) \text{ cm}^2 = 375 \text{ cm}^2$$

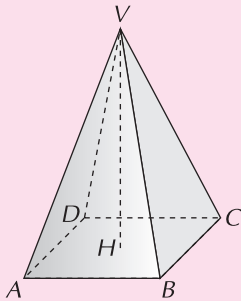
$$V = \frac{A_b \cdot \overline{VH}}{3} = \frac{375 \cdot 36}{3} \text{ cm}^3 = 4500 \text{ cm}^3$$

77 Una piramide retta ha per base un rettangolo il cui perimetro è 78 cm e con le dimensioni una $\frac{6}{7}$ dell'altra. Calcola il volume della piramide sapendo che l'altezza misura 39 cm. [4914 cm³]

78 Calcola il volume di una piramide quadrangolare regolare sapendo che lo spigolo di base e l'altezza misurano rispettivamente 12 cm e 35 cm. [1680 cm³]

79 *Esercizio Svolto*

Il volume di una piramide quadrangolare regolare è 621 cm³. Calcola la misura dell'altezza sapendo che lo spigolo di base misura 9 cm.



Dati	Incognita
$V = 621 \text{ cm}^3$	\overline{VH}
$\overline{AB} = 9 \text{ cm}$	

Determiniamo l'area di base:

$$A_b = \overline{AB}^2 = 9^2 \text{ cm}^2 = 81 \text{ cm}^2$$

Calcoliamo la misura dell'altezza applicando la formula inversa del volume:

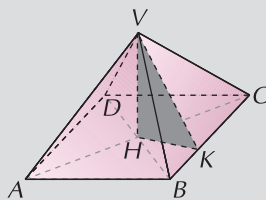
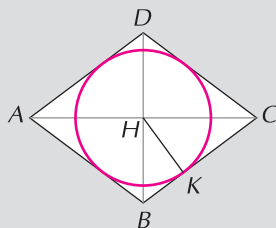
$$\overline{VH} = \frac{V \cdot 3}{A_b} = \frac{621 \cdot 3}{81} \text{ cm} = 23 \text{ cm}$$

80 Il volume di una piramide quadrangolare regolare è 2304 cm³. Calcola la misura dell'altezza sapendo che lo spigolo di base misura 16 cm. [27 cm]

81 Il volume di una piramide quadrangolare regolare è 3200 cm³. Calcola l'area della superficie totale sapendo che l'altezza misura 24 cm. [1440 cm²]

82 *Esercizio Guidato*

L'area della superficie totale e laterale di una piramide avente per base un rombo sono rispettivamente 7776 cm² e 4320 cm². Calcola il volume della piramide sapendo che la diagonale minore della base misura 72 cm.



Dati	Incognita
$A_t = 7776 \text{ cm}^2$	V
$A_l = 4320 \text{ cm}^2$	
$\overline{BD} = 72 \text{ cm}$	

Per poter calcolare il volume della piramide abbiamo bisogno dell'area di base e della misura dell'altezza. Calcoliamo l'area di base come differenza di aree e poi determiniamo le misure dell'apotema di base e dell'apotema della piramide per poter poi calcolare la misura dell'altezza.

$$A_b = A_t - \dots = (7776 - \dots) \text{ cm}^2 = \dots \text{ cm}^2$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot A_b : \overline{BD} = (2 \cdot \dots : 72) \text{ cm} = 96 \text{ cm}$$

$$\overline{HB} = \dots : 2 = (\dots : 2) \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

$$\overline{HC} = \dots : \dots = (\dots : \dots) \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{36^2 + 48^2} \text{ cm} = \sqrt{1296 + 2304} \text{ cm} = \sqrt{3600} \text{ cm} = 60 \text{ cm}$$

$$\overline{HK} = \frac{\dots \cdot \overline{HC}}{\overline{BC}} = \frac{\dots \cdot 48}{\dots} \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

$$\overline{VK} = A_l : p = [\dots : (2 \cdot 60)] \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

$$\overline{VH} = \sqrt{\overline{VK}^2 - \overline{HK}^2} = \sqrt{36^2 - 28,8^2} \text{ cm} = 21,6 \text{ cm}$$

$$V = \dots \cdot \overline{VH} : \dots = \dots \cdot 21,6 : \dots = 24883,2 \text{ cm}^3$$

- 83** L'area della superficie totale di una piramide avente per base un rombo è 1250 cm^2 . Calcola il volume della piramide sapendo che le due diagonali di base misurano rispettivamente 30 cm e 40 cm .

[1 000 cm³]

- 84** L'area della superficie totale di una piramide quadrangolare regolare è 4800 dm^2 e l'area di base è $\frac{1}{2}$ dell'area laterale. Calcola il volume della piramide.

[$\approx 18475 \text{ dm}^3$]

- **85** Un parallelepipedo rettangolo alto 100 cm con una dimensione di base $\frac{1}{4}$ dell'altra è equivalente ad una piramide quadrangolare regolare con lo spigolo di base lungo 40 cm e con l'area della superficie totale di 5760 cm^2 . Calcola l'area della superficie totale del parallelepipedo.

[8 512 cm²]

- **86** Un cubo è sormontato da una piramide quadrangolare regolare con la base coincidente con una faccia del cubo. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido sapendo che lo spigolo del cubo misura 72 cm e l'altezza della piramide è lunga 27 cm .

[32 400 cm²; 419 904 cm³]

- **87** In un cubo vi è una cavità a forma di piramide quadrangolare regolare con la base coincidente con quella del cubo. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido sapendo che lo spigolo del cubo misura 96 cm e l'altezza della piramide è lunga 20 cm .

[56 064 cm²; 823 296 cm³]

- **88** Un solido è costituito da un parallelepipedo rettangolo sormontato da una piramide la cui base si ottiene congiungendo i punti medi dei lati della faccia superiore del parallelepipedo. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido sapendo che l'area della superficie laterale e l'apotema della piramide misurano rispettivamente 160 cm^2 e 8 cm , mentre l'area della superficie laterale e una dimensione di base del parallelepipedo misurano rispettivamente 1400 cm^2 e 12 cm .

[1 848 cm²; 5 004,8 cm³]

- **89** Sia ABC un triangolo rettangolo in A la base di una piramide. Il vertice V si trova sulla perpendicolare al piano di ABC passante per A . Determina l'area della superficie totale e il volume della piramide così ottenuta sapendo che i due cateti del triangolo di base e l'altezza (che coincide con lo spigolo VA) misurano rispettivamente 16 cm , 12 cm e $12,8 \text{ cm}$.

[435,2 cm²; 409,6 cm³]

- **90** In un prisma vi è una cavità a forma di piramide quadrangolare regolare con la base coincidente con quella del prisma e per vertice il centro della base opposta. Calcola l'area della superficie totale e il peso del solido ($P_s = 5$) sapendo che l'area della base comune è 1764 dm^2 e l'apotema della piramide è lungo 35 dm .

[9 408 dm²; 164 640 kg]

- **91** Un solido è formato da un cubo e da due piramidi quadrangolari regolari congruenti aventi le basi coincidenti con le due facce opposte del cubo. Sapendo che la distanza tra i due vertici delle piramidi misura 119 cm e che il lato del cubo è $\frac{3}{2}$ di ciascuna delle due altezze delle piramidi, calcola l'area della superficie totale e il volume del solido.

[19 074 cm²; 191 607 cm³]