Le frazioni algebriche

Obiettivi

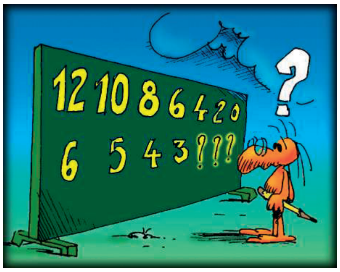
- semplificare frazioni algebriche
- operare con le frazioni algebriche calcolandone:
  - la somma e la differenza
  - il prodotto ed il quoziente
  - la potenza n-esima

MATEMATICA E REALTÀ

Un altro giochino.

Pensa un numero
Fanne il reciproco e aggiungi 1
Del numero trovato, fanne il reciproco e togli 1
Del nuovo numero fanne il reciproco e aggiungi 1
Trovi l'opposto del numero che hai pensato.

Sai spiegare perché?



1. RAPPORTI FRA POLINOMI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 14

Il quoziente fra due monomi o fra due polinomi non sempre si può esprimere come un monomio o un polinomio; per esempio:

- $6x^2y : 5xy^3 = \dfrac{6}{5}xy^{-2} = \dfrac{6x}{5y^2}$ e l'espressione $\dfrac{6x}{5y^2}$ non è un monomio;
- $(x^2 - 4x + 5) : (x - 1)$
  non è esprimibile mediante un polinomio in quanto la divisione non è esatta e si ottiene $\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1} = x - 3 + \dfrac{2}{x - 1}$.

In casi come questi si parla di frazione algebrica.

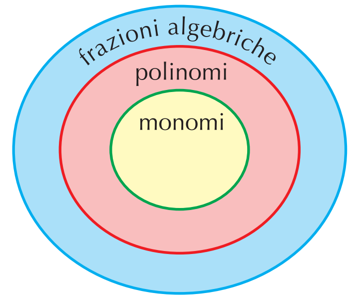
FRAZIONI ALGEBRICHE

Si chiama **frazione algebrica** l'espressione $\dfrac{A}{B}$ che esprime il quoziente di due polinomi (o monomi) A e B, supposto $B \neq 0$.

Il polinomio A è il numeratore della frazione, B ne è il denominatore e, visto che la divisione per zero non è un'operazione consentita, B non può essere il polinomio nullo.

Le due espressioni $\frac{6x}{5y^2}$ e $\frac{x^2-4x+5}{x-1}$ sono dunque frazioni algebriche in senso proprio; tuttavia anche le espressioni monomie o polinomie possono essere considerate frazioni algebriche il cui denominatore è uguale a 1. Questa interpretazione, analoga a quella che era stata data per le frazioni numeriche, ci consente di stabilire una relazione di inclusione fra gli insiemi delle frazioni algebriche, dei polinomi e dei monomi (***figura 1***) che ci permetterà di eseguire le operazioni fondamentali fra una frazione e un polinomio o un monomio.

Figura 1



Anche una frazione algebrica è funzione delle sue lettere e, a seconda dei valori numerici da esse assunti, la frazione assume valori diversi. Tuttavia, mentre un polinomio ha significato per qualunque valore attribuito alle variabili, una frazione non ha significato per i valori che annullano il suo denominatore. Per esempio:

- $\frac{x^2-4x+1}{x-3}$ ha significato per qualsiasi valore reale di x, ad esclusione di $x=3$
- $\frac{2a-1}{a(a-2)}$ ha significato per qualsiasi valore reale di a, ad esclusione di $a=0$ e $a=2$

L'insieme dei valori che è possibile attribuire alle lettere di un'espressione algebrica rappresenta il suo **insieme di definizione** o **dominio**.

Per rappresentare questo insieme si scrivono le **condizioni di esistenza** (C.d.E.) della frazione che indicano quali elementi devono essere esclusi.

La condizione di esistenza (C.d.E.) della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$ *è* $B(x) \neq 0$

Se le C.d.E. sono più di una, come nel caso della seconda delle precedenti frazioni, esse si elencano una dopo l'altra inteponendo la congiunzione "e". Tale congiunzione, posta tra due o più condizioni, indica che esse devono essere tutte verificate contemporaneamente.

In matematica, per esprimere questo concetto si usa il simbolo $\wedge$; relativamente ai due esempi precedenti le C.d.E. sono rispettivamente:

- $x \neq 3$
- $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 2$

Come per le frazioni numeriche, anche per quelle algebriche possiamo poi introdurre il concetto di equivalenza.

FRAZIONI EQUIVALENTI

Due frazioni algebriche, funzioni delle stesse variabili, sono **equivalenti** se diventano numeri uguali in corrispondenza di ogni valore che sia possibile attribuire alle variabili.

La definizione ci permette di capire se due frazioni non sono equivalenti; basta infatti trovare un caso numerico che soddisfa la C.d.E. delle due frazioni per il quale si ottengono due valori diversi. Per esempio:

$$\frac{2x}{2x-1} \quad \text{e} \quad \frac{x}{x-1}$$

in corrispondenza di $x=2$ valgono rispettivamente $\frac{4}{3}$ e 2, quindi non sono equivalenti.

Non è invece possibile applicare la definizione per riconoscere l'equivalenza (si dovrebbero sostituire infiniti valori alle variabili) ed è necessario ricorrere ad altre considerazioni. Il criterio che si applica è analogo a quello stabilito per le frazioni numeriche.

CRITERIO DI EQUIVALENZA

Le frazioni algebriche $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ sono equivalenti se $A \cdot D = B \cdot C$.

Per esempio:

$\frac{2a}{a^2 - a}$ e $\frac{2a+2}{a^2-1}$ sono equivalenti nel loro dominio comune perché $2a(a^2-1) = (2a+2)(a^2-a)$

Infatti: sviluppando il primo membro $2a(a^2-1) = 2a^3 - 2a$
sviluppando il secondo membro $(2a+2)(a^2-a) = 2a^3 - 2a$.

Riconoscere l'equivalenza è quindi semplice, ma ciò che ci interessa di più è sapere quali sono le operazioni che si possono eseguire su una frazione algebrica per ottenerne una ad essa equivalente. Le operazioni "lecite" sono quelle che applicano la proprietà invariantiva della divisione e quindi, data una frazione algebrica, possiamo:

- dividere numeratore e denominatore per uno stesso monomio o polinomio (non nullo) e questo ci porterà a poter semplificare una frazione
- moltiplicare numeratore e denominatore per uno stesso monomio o polinomio (non nullo) e questo ci servirà per ridurre due o più frazioni allo stesso denominatore in modo da poterle sommare o sottrarre.

Proprietà invariantiva della divisione: *se si moltiplicano o si dividono numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero non nullo, si ottiene una frazione equivalente a quella data.*

ESEMPI

1. Troviamo il dominio delle seguenti frazioni algebriche.

a. $\frac{3a+b}{4a}$

La frazione è funzione delle variabili a e b; mentre b può assumere qualsiasi valore numerico, a non può valere zero: C.d.E. $a \neq 0$.

b. $\frac{2y}{y^2 - 2y + 1}$

Scomponiamo dapprima il denominatore della frazione: $\frac{2y}{y^2-2y+1} = \frac{2y}{(y-1)^2}$

Il denominatore si annulla se $y = 1$, quindi la C.d.E. è $y \neq 1$.

2. Stabiliamo se le due frazioni $\frac{x}{x+1}$ e $\frac{x^2-x}{x^2-1}$ sono equivalenti.

La prima frazione esiste se $x+1 \neq 0$; il denominatore della seconda si scompone in $(x-1)(x+1)$, quindi la frazione esiste se $x - 1 \neq 0 \ \wedge \ x+1 \neq 0$.

Affinché le due frazioni siano equivalenti deve essere: $x(x^2-1) = (x^2-x)(x+1)$

Sviluppiamo il primo membro: $x(x^2-1) = x^3 - x$

Sviluppiamo il secondo membro: $(x^2-x)(x+1) = x^3 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - x = x^3 - x$

Avendo ottenuto la stessa espressione, possiamo concludere che le due frazioni sono equivalenti.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La C.d.E. della frazione algebrica $\dfrac{3(b+1)}{b-1}$ è:

a. qualunque $b \in R$ **b.** $b \neq 1$ **c.** $b \neq -1$ **d.** $b \neq 0$

2. Considerata la frazione $\dfrac{x-3}{(x-y)(x+2y)}$, indica quali delle seguenti coppie di valori non è possibile attribuire alle variabili:

a. $x = 3,\ y = 4$ **b.** $x = -4,\ y = 2$
c. $x = 3,\ y = 2$ **d.** $x = -2,\ y = -2$
e. $x = 0,\ y = 0$ **f.** $x = 1,\ y = -2$
g. $x = -1,\ y = 1$ **h.** $x = -2,\ y = 1$

3. Nell'ambito del loro dominio, indica a quali delle seguenti frazioni è equivalente $\dfrac{a-2}{a-3}$:

a. $\dfrac{a^2-2a}{a^2-3}$ **b.** $\dfrac{a^2-4}{a^2-9}$ **c.** $\dfrac{a^2-2a}{a^2-3a}$ **d.** $\dfrac{2-a}{3-a}$

2. LA SEMPLIFICAZIONE DELLE FRAZIONI ALGEBRICHE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 16

Una frazione algebrica $\dfrac{A}{B}$, nel suo insieme di definizione, si può semplificare se il *M.C.D.* fra il numeratore A e il denominatore B è diverso da 1, cioè se A e B hanno divisori comuni; in caso contrario si dice che la frazione è **irriducibile**.

LA PROCEDURA DI SEMPLIFICAZIONE

L'algoritmo per semplificare una frazione è il seguente:
- si scompongono numeratore e denominatore
- si individuano i divisori comuni, cioè il *M.C.D.*
- si dividono il numeratore e il denominatore per il loro *M.C.D.*

La proprietà invariantiva assicura che il risultato dopo la divisione è equivalente alla frazione iniziale.

Applichiamo questa procedura per semplificare la frazione $\dfrac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}$:

- scomponiamo numeratore e denominatore: $\dfrac{x(x^2-1)}{x(x^2-2x+1)} = \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)^2}$
- il *M.C.D.* fra numeratore e denominatore è: $x(x-1)$
- dividiamo per $x(x-1)$: $\dfrac{[x(x-1)(x+1)] : [x(x-1)]}{[x(x-1)^2] : [x(x-1)]} = \dfrac{x+1}{x-1}$

Per le condizioni di esistenza deve essere
$x \neq 0 \wedge x-1 \neq 0$

Nella pratica si procede in modo più veloce semplificando, come nelle frazioni numeriche, i fattori uguali al numeratore e al denominatore con un tratto di penna, sottintendendo il quoziente 1; per la precedente frazione si scrive di solito così:

$$\frac{\cancel{x}\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x}(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

ESEMPI

1. $\dfrac{3abx^3}{2ax^2}$ si può semplificare per a e per x^2: $\dfrac{3\cancel{a}bx^{\cancel{3}}}{2\cancel{a}\cancel{x^2}} = \dfrac{3bx}{2}$

2. $\dfrac{8a^3y^2}{4a^4y}$ si può semplificare per 4, per a^3 e per y: $\dfrac{\overset{2}{\cancel{8}}\cancel{a^3}y^{\cancel{2}}}{\cancel{4}a^{\cancel{4}}\cancel{y}} = \dfrac{2y}{a}$

3. $\dfrac{5x^2+10x}{5x} = \dfrac{\cancel{5x}(x+2)}{\cancel{5x}} = x+2$

4. $\dfrac{3a^2x^2-9a^3x}{ax^3-3a^2x^2} = \dfrac{3a^{\cancel{2}}\cancel{x}\cancel{(x-3a)}}{\cancel{a}x^{\cancel{2}}\cancel{(x-3a)}} = \dfrac{3a}{x}$

5. $\dfrac{y^2-2y}{3y^3-12y^2+12y} = \dfrac{y(y-2)}{3y(y^2-4y+4)} = \dfrac{\cancel{y}\cancel{(y-2)}}{3\cancel{y}(y-2)^{\cancel{2}}} = \dfrac{1}{3(y-2)}$

6. $\dfrac{a+2b}{a^2-b^2} = \dfrac{a+2b}{(a-b)(a+b)}$

il numeratore e il denominatore non hanno divisori comuni al di fuori dell'unità e quindi la frazione è irriducibile

Attenzione agli errori

- $\dfrac{x^2+y^2}{x^2}$

  è irriducibile; **non si può** semplificare in questo modo: $\dfrac{\cancel{x^2}+y^2}{\cancel{x^2}} = y^2$

- $\dfrac{2+x}{2-a}$

  è irriducibile; **non si può** semplificare in questo modo: $\dfrac{\cancel{2}+x}{\cancel{2}-a} = -\dfrac{x}{a}$

- $\dfrac{a(a-1)+a}{a(a-1)}$ non è uguale a $\dfrac{a\cancel{(a-1)}+a}{a\cancel{(a-1)}} = a$

  ma è uguale a $\dfrac{a^2-a+a}{a(a-1)} = \dfrac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}(a-1)} = \dfrac{a}{a-1}$

In sostanza: **in una frazione algebrica si semplificano i fattori, non si semplificano gli addendi**.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La frazione $\dfrac{2ab-a^2}{ab}$ si semplifica in:

a. $\dfrac{2b-a}{b}$ **b.** $-a^2$ **c.** $2-a^2$ **d.** non si semplifica perché è irriducibile

2. Nella semplificazione delle seguenti frazioni sono stati commessi degli errori. Individuali e correggili:

a. $\dfrac{\cancel{3x^3}-9x^2}{\cancel{3x^3}-6x^2} = \dfrac{-9x^2}{-6x^2} = \dfrac{3}{2}$ **b.** $\dfrac{2a^2-4a+2}{a^2-1} = \dfrac{2\cancel{(a-1)}^2}{\cancel{(a-1)}(a+1)} = \dfrac{2}{a+1}$

3. L'ADDIZIONE E LA SOTTRAZIONE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 20

Come per le frazioni numeriche, la somma o la differenza di frazioni algebriche **che hanno lo stesso denominatore** si calcola sommando o sottraendo i rispettivi numeratori.

Con le frazioni numeriche: $\frac{3}{4}+\frac{7}{4}-\frac{9}{4}=\frac{3+7-9}{4}=\frac{1}{4}$

Con le frazioni algebriche: $\frac{x}{x-1}-\frac{3x-4}{x-1}+\frac{2-x}{x-1}=\frac{x-(3x-4)+(2-x)}{x-1}=\frac{x-3x+4+2-x}{x-1}=\frac{6-3x}{x-1}$

Se le frazioni non hanno lo stesso denominatore, occorre prima determinare un denominatore comune, di solito il *m.c.m.* fra i denominatori, e poi eseguire la somma o la differenza come nel caso precedente.

Con le frazioni numeriche	Con le frazioni algebriche
$\frac{7}{6}+\frac{5}{9}$	$\frac{a-1}{a}+\frac{2a+1}{a+2}$ C.d.E.: $a\neq 0 \wedge a+2\neq 0$
$m.c.m.(6,\ 9)=18$	$m.c.m.(a,\ (a+2))=a(a+2)$
$\frac{21}{18}+\frac{10}{18}$	$\frac{(a-1)(a+2)}{a(a+2)}+\frac{a(2a+1)}{a(a+2)}$
$\frac{21+10}{18}=\frac{31}{18}$	$\frac{(a-1)(a+2)+a(2a+1)}{a(a+2)}=\frac{3a^2+2a-2}{a(a+2)}$

In generale, per sommare o sottrarre due o più frazioni algebriche conviene seguire questa procedura (le parti fra parentesi si riferiscono al precedente esempio):

LA PROCEDURA DI CALCOLO

- scomporre innanzi tutto i denominatori delle frazioni e porre le condizioni di esistenza (primo passaggio)
- semplificare le frazioni che non sono irriducibili
- trovare il *m.c.m.* fra i denominatori (secondo passaggio)
- ridurre tutte le frazioni allo stesso denominatore (terzo passaggio)
- eseguire le addizioni e le sottrazioni e semplificare la frazione ottenuta se necessario (quarto passaggio).

Di solito, poi, come avrai modo di vedere negli esempi che seguono, la riduzione allo stesso denominatore e l'esecuzione dell'addizione o della sottrazione si eseguono nello stesso passaggio.

ESEMPI

1. $\frac{3b}{2x+y}+\frac{2a}{2x-y}=$ C.d.E. $2x+y\neq 0 \ \wedge\ 2x-y\neq 0$

$=\frac{3b(2x-y)}{(2x+y)(2x-y)}+\frac{2a(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)}=$ riduzione allo stesso denominatore **(A)**

$=\frac{3b(2x-y)+2a(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)}=$ somma algebrica dei numeratori

$$= \frac{6bx - 3by + 4ax + 2ay}{(2x+y)(2x-y)}$$ svolgimento dei calcoli

Poiché la frazione è irriducibile, questo è anche il risultato dell'addizione.

Di solito, per abbreviare la sequenza dei passaggi, l'operazione di riduzione allo stesso denominatore si svolge contemporaneamente a quella di addizione fra i numeratori, riducendo i due passaggi ad uno solo. In pratica, si omette di scrivere il passaggio **(A)**.

2. $\frac{2a-b}{ab} - \frac{a+2b}{a^2+ab} + \frac{a}{ab+b^2} =$

$$= \frac{2a-b}{ab} - \frac{a+2b}{a(a+b)} + \frac{a}{b(a+b)} =$$ scomposizione dei denominatori
C.d.E. $a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0 \ \wedge \ a+b \neq 0$

$$= \frac{(2a-b)(a+b) - (a+2b)b + a^2}{ab(a+b)} =$$ denominatore comune e somma algebrica dei numeratori

$$= \frac{2a^2 + 2ab - ab - b^2 - ab - 2b^2 + a^2}{ab(a+b)} =$$ svolgimento dei calcoli

$$= \frac{3a^2 - 3b^2}{ab(a+b)} =$$ riduzione dei monomi simili

$$= \frac{3(a-b)(a+b)}{ab(a+b)} =$$ scomposizione del numeratore

$$= \frac{3(a-b)\cancel{(a+b)}}{ab\cancel{(a+b)}} = \frac{3(a-b)}{ab}$$ semplificazione della frazione e risultato

3. $\frac{x-3}{3x^2+x} - \frac{x+3}{x-3x^2} - \frac{x}{9x^2-1} + \frac{13x^2-8}{9x^3-x} =$

$$= \frac{x-3}{x(3x+1)} - \frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{x(1-3x)}} - \frac{x}{(3x-1)(3x+1)} + \frac{13x^2-8}{x(9x^2-1)} =$$

Fai attenzione alle parti evidenziate in colore rosso. Poiché i denominatori delle altre frazioni hanno come fattore $3x-1$ che differisce da $1-3x$ per i segni dei suoi termini, dobbiamo raccogliere un segno "$-$" in modo da trasformare $1-3x$ in $3x-1$: $1-3x = -(3x-1)$

$$= \frac{x-3}{x(3x+1)} - \frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{-x(3x-1)}} - \frac{x}{(3x-1)(3x+1)} + \frac{13x^2-8}{x(3x-1)(3x+1)} =$$

È poi opportuno non lasciare il segno negativo al denominatore ma portarlo davanti alla linea di frazione; tale operazione cambia il segno che c'è davanti alla frazione. In questo caso il segno da "$-$" è diventato "$+$".

$$= \frac{x-3}{x(3x+1)} + \frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{x(3x-1)}} - \frac{x}{(3x-1)(3x+1)} + \frac{13x^2-8}{x(3x-1)(3x+1)} =$$

C.d.E. $x \neq 0 \ \wedge \ 3x+1 \neq 0 \ \wedge \ 3x-1 \neq 0$

$$= \frac{(x-3)(3x-1) + (x+3)(3x+1) - x^2 + 13x^2 - 8}{x(3x-1)(3x+1)} =$$

$$= \frac{3x^2 - x - 9x + 3 + 3x^2 + x + 9x + 3 - x^2 + 13x^2 - 8}{x(3x-1)(3x+1)} =$$

$$= \frac{18x^2 - 2}{x(3x-1)(3x+1)} = \frac{2(9x^2-1)}{x(3x-1)(3x+1)} = \frac{2\,\cancel{(3x-1)}\cancel{(3x+1)}}{x\,\cancel{(3x-1)}\cancel{(3x+1)}} = \frac{2}{x}$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Completa in modo da ottenere una frazione equivalente a quella data:

a. $\dfrac{2a}{a+1} = \dfrac{\ldots\ldots}{a^2-1}$ **b.** $\dfrac{x-1}{2x} = \dfrac{3x-3}{\ldots\ldots}$ **c.** $\dfrac{x+1}{3x+2} = \dfrac{x^2-1}{\ldots\ldots}$ **d.** $\dfrac{3x^2}{2x^3+2x} = \dfrac{\ldots\ldots}{4(x^2+1)}$

2. Completa i passaggi $\dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{a-1} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{a(a-1)} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{a(a-1)}$:

Il risultato è: **a.** $\dfrac{1}{a-1}$ **b.** $\dfrac{2a-3}{a(a-1)}$ **c.** $\dfrac{a-2}{a(a-1)}$ **d.** $-\dfrac{3}{a-1}$

3. L'espressione $\dfrac{1}{b+1} - \dfrac{b}{1-b} - \dfrac{3}{b^2-1}$ è equivalente a (sono possibili più risposte):

a. $\dfrac{1}{b+1} - \dfrac{b}{b-1} - \dfrac{3}{b^2-1}$ **b.** $-\dfrac{1}{b-1} + \dfrac{b}{b-1} - \dfrac{3}{b^2-1}$

c. $\dfrac{1}{1+b} - \dfrac{b}{1-b} + \dfrac{3}{1-b^2}$ **d.** $\dfrac{1}{b+1} + \dfrac{b}{b-1} - \dfrac{3}{b^2-1}$

4. LA MOLTIPLICAZIONE E LA DIVISIONE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 26

Anche queste operazioni si eseguono con regole del tutto analoghe a quelle viste per le frazioni numeriche (nel seguito omettiamo le condizioni di esistenza).

- La **moltiplicazione** di due frazioni algebriche si esegue moltiplicando fra loro i numeratori e i denominatori e semplificando poi la frazione ottenuta; per esempio:

$$\frac{4a+b}{a^2} \cdot \frac{2a}{b^2} = \frac{2\cancel{a}(4a+b)}{a^{\cancel{2}}b^2} = \frac{2(4a+b)}{ab^2}$$

- La **divisione** di due frazioni si esegue moltiplicando la prima frazione per il reciproco della seconda; per esempio:

$$\frac{x-y}{x} : \frac{2}{x+3y} = \frac{x-y}{x} \cdot \frac{x+3y}{2} = \frac{(x-y)(x+3y)}{2x}$$

- L'**elevamento a potenza** di una frazione algebrica si ottiene elevando a quella potenza il numeratore e il denominatore; per esempio:

$$\left(\frac{2a}{a-3b}\right)^2 = \frac{(2a)^2}{(a-3b)^2} = \frac{4a^2}{(a-3b)^2}$$

Nella pratica, quando si deve eseguire una moltiplicazione, è comodo eseguire prima le eventuali semplificazioni e poi il prodotto:

- si scompongono tutti i polinomi delle frazioni, sia quelli al numeratore che quelli al denominatore
- si eseguono le semplificazioni dei fattori al numeratore con quelli al denominatore, anche di frazioni diverse
- si esegue il prodotto.

La procedura di calcolo della moltiplicazione

Per esempio:

$$\frac{4x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\frac{3x+3y}{2x-y}=\frac{\cancel{(2x-y)}(2x+y)}{(x+y)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{3\cancel{(x+y)}}{\cancel{2x-y}}=\frac{3(2x+y)}{x+y}$$

ESEMPI

1. $\frac{5ab}{2x^2}\cdot\frac{3x}{10a^2}$

Come nel caso del prodotto fra frazioni numeriche, conviene prima fare le semplificazioni possibili:

- $5ab$ al numeratore della prima frazione con $10a^2$ al denominatore della seconda
- x al numeratore della seconda frazione con x^2 al denominatore della prima.

$$\frac{\cancel{5}\cancel{a}b}{2x^{\cancel{2}}}\cdot\frac{3\cancel{x}}{\underset{2}{\cancel{10}}a^{\cancel{2}}}=\frac{3b}{4ax}$$

2. $\frac{x^2-2xy+y^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{3a-3b}{x-y}$

Scomponiamo i polinomi delle due frazioni: $\frac{(x-y)^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{3(a-b)}{x-y}$

Eseguiamo le semplificazioni possibili: $\frac{(x-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-b)}(a+b)}\cdot\frac{3\cancel{(a-b)}}{\cancel{x-y}}=\frac{3(x-y)}{a+b}$

3. $\frac{3xy^2}{2x-4y}:\frac{x^2y^2}{x^2-4y^2}$

Trasformiamo la divisione in moltiplicazione: $\frac{3xy^2}{2x-4y}\cdot\frac{x^2-4y^2}{x^2y^2}$

Scomponiamo: $\frac{3xy^2}{2(x-2y)}\cdot\frac{(x-2y)(x+2y)}{x^2y^2}$

Semplifichiamo: $\frac{3\cancel{x}\cancel{y^2}}{2\cancel{(x-2y)}}\cdot\frac{\cancel{(x-2y)}(x+2y)}{x^{\cancel{2}}\cancel{y^2}}=\frac{3(x+2y)}{2x}$

4. $\left(-\frac{x^2y^3}{x^2+y}\right)^2$

Il segno della frazione potenza è positivo; eleviamo al quadrato numeratore e denominatore:

$$+\frac{(x^2y^3)^2}{(x^2+y)^2}=\frac{x^4y^6}{(x^2+y)^2}$$

Di solito la potenza dei polinomi al denominatore si lascia indicata e non è indispensabile sviluppare il calcolo.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Completa i passaggi $\frac{a-b}{a^2(a^2+b^2)} \cdot (a^4 - b^4) = \frac{(a-b)}{a^2(a^2+b^2)} \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Il risultato che si ottiene è:

a. $\frac{a^3+b^3}{a^2}$ **b.** $\frac{a^3-b^3}{a^2}$ **c.** $\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2}$ **d.** $\frac{(a-b)(a+b)^2}{a^2}$

2. L'espressione $\frac{x+y}{x-y} : \frac{2x(x+y)}{y(x-y)} \cdot 4x$ è uguale a (sono possibili più risposte):

a. $\frac{x+y}{x-y} : \left[\frac{2x(x+y)}{y(x-y)} \cdot \frac{1}{4x}\right]$ **b.** $\frac{x+y}{x-y} : \left[\frac{2x(x+y)}{y(x-y)} \cdot 4x\right]$

c. $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y(x-y)}{2x(x+y)} \cdot \frac{1}{4x}$ **d.** $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y(x-y)}{2x(x+y)} \cdot 4x$

3. L'espressione $\left(\frac{2a}{a-b}\right)^2 : \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-2}$

a. è equivalente a:

① $\left(\frac{2a}{a-b}\right)^2 \cdot \left(\frac{ab}{a^2-b^2}\right)^2$ ② $\left(\frac{2a}{a-b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$ ③ nessuna delle precedenti

b. ha risultato:

① $\frac{2(a+b)^2}{b^2}$ ② $\frac{4(a+b)^2}{b^2}$ ③ nessuno dei precedenti

5. LE ESPRESSIONI CON LE FRAZIONI ALGEBRICHE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 33

In una espressione, le operazioni fra frazioni algebriche devono essere eseguite rispettando la consueta precedenza:

- prima le eventuali potenze
- poi le moltiplicazioni e le divisioni
- da ultimo le addizioni e le sottrazioni

a cominciare dalle parentesi più interne.

Vediamo allora alcuni esempi riassuntivi.

ESEMPI

1. $\left(\frac{4x+3}{8x} - \frac{x-2}{4x^2} + \frac{3-x}{2x}\right) \cdot \left(1 - \frac{13x-4}{13x+4}\right)$

Eseguiamo dapprima le operazioni all'interno delle parentesi:

$$\frac{x(4x+3) - 2(x-2) + 4x(3-x)}{8x^2} \cdot \frac{13x+4-(13x-4)}{13x+4} =$$

$$= \frac{4x^2 + 3x - 2x + 4 + 12x - 4x^2}{8x^2} \cdot \frac{13x + 4 - 13x + 4}{13x + 4} =$$

$$= \frac{13x + 4}{8x^2} \cdot \frac{8}{13x + 4}$$

Semplifichiamo ed eseguiamo il prodotto: $\frac{\cancel{13x + 4}}{\cancel{8}x^2} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{13x + 4}} = \frac{1}{x^2}$

2. $\left(\frac{2}{3 - x} - \frac{12}{9 - x^2}\right)^2 \cdot \frac{x^2 + 6x + 9}{2x - 2}$

Tenendo presente che $9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$ eseguiamo come prima cosa la differenza all'interno della parentesi:

$$\left[\frac{2(3 + x) - 12}{(3 - x)(3 + x)}\right]^2 \cdot \frac{x^2 + 6x + 9}{2x - 2} = \left[\frac{-2\cancel{(3 - x)}}{\cancel{(3 - x)}(3 + x)}\right]^2 \cdot \frac{x^2 + 6x + 9}{2x - 2} = \left(-\frac{2}{3 + x}\right)^2 \cdot \frac{x^2 + 6x + 9}{2x - 2}$$

Eseguiamo la potenza, lasciando indicata quella al denominatore, e scomponiamo contemporaneamente i polinomi della seconda frazione; dopo le opportune semplificazioni, calcoliamo il prodotto:

$$\frac{4}{(3 + x)^2} \cdot \frac{(3 + x)^2}{2(x - 1)} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{(3 + x)^2}} \cdot \frac{\cancel{(3 + x)^2}}{\cancel{2}(x - 1)} = \frac{2}{x - 1}$$

3. $\left[\left(\frac{a}{a - b} - \frac{a - b}{a}\right) : \frac{b}{a} + \frac{2a}{a - b}\right]^2 \cdot \left(\frac{2a}{4a - b} + \frac{4a - b}{2a} - 2 - \frac{b^2 - 8a^2 + 6ab}{8a^2 - 2ab}\right) =$

$$= \left[\frac{a^2 - (a - b)^2}{a(a - b)} : \frac{b}{a} + \frac{2a}{a - b}\right]^2 \cdot \left[\frac{2a}{4a - b} + \frac{4a - b}{2a} - 2 - \frac{b^2 - 8a^2 + 6ab}{2a(4a - b)}\right] =$$

$$= \left[\frac{a^2 - a^2 + 2ab - b^2}{a(a - b)} \cdot \frac{a}{b} + \frac{2a}{a - b}\right]^2 \cdot \frac{4a^2 + (4a - b)^2 - 4a(4a - b) - b^2 + 8a^2 - 6ab}{2a(4a - b)} =$$

$$= \left[\frac{\cancel{b}(2a - b)}{\cancel{a}(a - b)} \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} + \frac{2a}{a - b}\right]^2 \cdot \frac{4a^2 + \cancel{16a^2} - 8ab + \cancel{b^2} - \cancel{16a^2} + 4ab - \cancel{b^2} + 8a^2 - 6ab}{2a(4a - b)} =$$

$$= \left[\frac{2a - b}{a - b} + \frac{2a}{a - b}\right]^2 \cdot \frac{12a^2 - 10ab}{2a(4a - b)} = \left(\frac{4a - b}{a - b}\right)^2 \cdot \frac{\cancel{2a}(6a - 5b)}{\cancel{2a}(4a - b)} = \frac{(4a - b)^{\cancel{2}}}{(a - b)^2} \cdot \frac{6a - 5b}{\cancel{4a - b}} = \frac{(4a - b)(6a - 5b)}{(a - b)^2}$$

4. $\dfrac{\dfrac{2x - 9}{2x} \cdot \dfrac{1}{4x^2 - 81}}{\dfrac{1}{4x^2 + 18x}}$

Ricordando che una linea di frazione indica l'operazione di divisione, possiamo riscrivere l'espressione in questo modo:

$$\left(\frac{2x - 9}{2x} \cdot \frac{1}{4x^2 - 81}\right) : \frac{1}{4x^2 + 18x}$$

Semplificando otteniamo:

$$\left[\frac{\cancel{2x-9}}{2x}\cdot\frac{1}{(\cancel{2x-9})(2x+9)}\right]:\frac{1}{2x(2x+9)}=\frac{1}{\cancel{2x}\,\cancel{(2x+9)}}\cdot\frac{\cancel{2x}\,\cancel{(2x+9)}}{1}=1$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Data l'espressione $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{2x^2}$:

a. la prima operazione da eseguire è l'addizione $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x^2-1}$ V F

b. la prima operazione da eseguire è la moltiplicazione $\dfrac{x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{2x^2}$ V F

c. semplificando l'espressione si ottiene $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)}$ V F

d. semplificando l'espressione si ottiene $\dfrac{2x^2+1}{2x(x-1)}$ V F

Sul sito www.edatlas.it *trovi...*

- il laboratorio di informatica con Derive
- gli esercizi dalle Gare di matematica
- i problemi di Matematica e Realtà
- le attività di recupero

Ripercorriamo le istruzioni del gioco indicando con x il numero iniziale:

Pensa un numero x

Fanne il reciproco e aggiungi 1 $\dfrac{1}{x}+1$

Del numero trovato, fanne il reciproco e togli 1 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+1}-1$

Del nuovo numero fanne il reciproco e aggiungi 1 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+1}-1}+1$

Trovi l'opposto del numero che hai pensato.

Svolgendo l'ultima espressione ottenuta si trova che è uguale a $-x$.

La risposta al quesito iniziale

I concetti e le regole

Le frazioni algebriche

Una frazione algebrica rappresenta il quoziente $\dfrac{A}{B}$ fra due polinomi A e B con $B \neq 0$.

Essa è funzione delle lettere che vi compaiono e, poiché la divisione per zero non è consentita, le variabili non possono assumere valori che annullano il polinomio al denominatore.
L'insieme dei valori che è possibile attribuire alle lettere è il **dominio** della frazione.
Per determinare il dominio è necessario scomporre il polinomio B e imporre che ciascun fattore della scomposizione sia diverso da zero (condizioni di esistenza).

Frazioni equivalenti

Due frazioni algebriche sono **equivalenti** se attribuendo valori uguali a lettere uguali, si ottengono sempre frazioni numeriche equivalenti.

L'equivalenza fra due frazioni algebriche $\dfrac{A}{B}$ e $\dfrac{C}{D}$ si riconosce verificando l'uguaglianza $A \cdot D = B \cdot C$.

Per passare da una frazione a un'altra ad essa equivalente si applica la proprietà invariantiva, cioè si moltiplicano o si dividono numeratore e denominatore della frazione per uno stesso polinomio non nullo.

Le operazioni

Con le frazioni algebriche si possono eseguire tutte le operazioni che si possono eseguire con le frazioni numeriche; quindi:

- si può semplificare una frazione scomponendo i suoi termini e dividendo numeratore e denominatore per i fattori comuni
- si possono sommare, sottrarre, moltiplicare o dividere due frazioni algebriche con regole analoghe a quelle applicate alle stesse operazioni con le frazioni numeriche:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD} \qquad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD} \qquad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

- si può elevare a potenza una frazione elevando a quella potenza il numeratore e il denominatore: $\left(\dfrac{A}{B}\right)^n=\dfrac{A^n}{B^n}$

Le frazioni algebriche

RAPPORTI FRA POLINOMI

la teoria è a pag. 1

Comprensione

1 Una frazione algebrica ha significato per tutti i valori delle lettere che in essa compaiono tranne:
a. per quelli che rendono nullo il denominatore;
b. per quelli che rendono nullo il numeratore;
c. per quelli che rendono nullo il numeratore oppure il denominatore;
d. per quelli che rendono uguale a 1 il denominatore.

2 La frazione algebrica $\dfrac{x^2+4}{x^2-3x-4}$ non ha significato:

a. solo per $x=-1$ **b.** solo per $x=4$ **c.** per $x=-1$ o $x=4$ **d.** ha sempre significato

3 Completa:

a. la frazione $\dfrac{x-2}{x+1}$ esiste se ...., si annulla se ....

b. la frazione $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ si annulla se ...., esiste se ....

c. la frazione $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ per $x=2$ vale ...., per $x=1$ ....

4 Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a. le frazioni $\dfrac{x}{x-1}$ e $\dfrac{2x}{x+1}$ sono equivalenti perchè assumono lo stesso valore per $x=0$ V F

b. le frazioni $\dfrac{x}{x-1}$ e $\dfrac{2x}{x+1}$ non sono equivalenti V F

c. le frazioni $\dfrac{x}{x+1}$ e $\dfrac{x^2}{x^2+x}$ sono equivalenti per ogni valore di x diverso da -1 V F

d. le frazioni $\dfrac{x}{x-1}$ e $\dfrac{x^2}{x^2-x}$ sono equivalenti per ogni valore di x diverso da 0 e da 1. V F

5 La frazione $\dfrac{3-y}{2-y}$ è equivalente a (sono possibili più risposte):

a. $\dfrac{y-3}{y-2}$ **b.** $-\dfrac{y-3}{y-2}$ **c.** $-\dfrac{3-y}{y-2}$ **d.** $-\dfrac{y-3}{2-y}$

6 Nell'ambito del suo dominio, la frazione $\dfrac{3a-6}{a^2-5a+6}$ è uguale a zero:

a. se $a=6$ **b.** se $a=2$ o $a=3$ **c.** se $a=3$ **d.** mai

7 Considerata la frazione algebrica $\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$, in quale dei seguenti casi è stata applicata correttamente la proprietà invariantiva?

a. $\frac{x^2-1+4}{x^2+3x+2+4}$ **b.** $\frac{3x^2-3}{3x^2+3x+2}$ **c.** $\frac{x-1}{x+2}$ **d.** $\frac{x^2+x-2}{(x+2)^2}$

Applicazione

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche.

8 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{2x-5y}{x(y-3)}$$

Una frazione ha significato se il suo denominatore non è nullo.
Dobbiamo quindi escludere tutti quei valori delle variabili che lo rendono uguale a zero.
Nel nostro caso il denominatore si annulla se $x=0$ oppure se $y-3=0$ perché un prodotto è zero se almeno uno dei suoi fattori è zero.
Allora, perché la frazione abbia senso deve essere $x \neq 0 \ \wedge \ y-3 \neq 0$.

9 $\frac{2a-b}{b}$; $\frac{x-2y}{3x}$

10 $\frac{2x+y^2}{3y}$; $\frac{a-b}{a^2}$

11 $\frac{a+2b}{3a}$; $\frac{3a+b}{b-5}$

12 $\frac{2y-3}{y+3}$; $\frac{5y-2}{y+7}$

13 $\frac{1}{x^3}$; $\frac{2}{3ab}$

14 $\frac{5}{3y^3}$; $\frac{-7}{y-1}$

15 $\frac{x+y}{2x^2y^2}$; $\frac{a+b}{a^2b^2c}$

16 $\frac{2ab}{a-2}$; $\frac{3}{y+3}$

17 $\frac{b}{a-b}$; $\frac{8}{x+y}$

18 $\frac{1}{x(x-1)}$; $\frac{a}{2ab^2}$

19 $\frac{2}{x-3}$; $\frac{3}{y+1}$

20 $\frac{b}{a(b-1)}$; $\frac{5}{x(x-2)}$

Indica, fra le seguenti coppie di frazioni, quali sono quelle equivalenti nell'insieme di definizione comune.

21 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{x+1}{x+2} \qquad \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$

Le due frazioni, quando esistono, sono equivalenti se $(x+1)(x^2+x-2)=(x^2-1)(x+2)$
Sviluppando separatamente i due membri dell'uguaglianza ottieni:
I membro: $(x+1)(x^2+x-2)=$ ....
II membro: $(x^2-1)(x+2)=$ ....
Puoi quindi concludere che ....

22 $\frac{2a}{a-1}$; $\frac{a^2}{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a}$

23 $\frac{3x-2}{3x}$; $\frac{3x-2+6}{3x+6}$

24 $\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$; $\quad\dfrac{x-1}{x-2}$

25 $\dfrac{x-2y}{x+2y}$; $\quad\dfrac{2y-x}{x+2y}$

26 $\dfrac{x-3}{3-x}$; $\quad\dfrac{2x+1}{-2x-1}$

27 $\dfrac{2x-y}{x}$; $\quad\dfrac{y-2x}{-x}$

28 $\dfrac{x^2-25}{(x-5)(x+5)}$; $\quad\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2-9}$

29 $\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$; $\quad\dfrac{1}{x+2}$

30 $\dfrac{3x-3y}{x^2+y^2-2xy}$; $\quad\dfrac{-3}{y-x}$

31 $\dfrac{x^2+y^2}{6x}$; $\quad\dfrac{x+y^2}{6}$

32 $\dfrac{5x^2-20}{3x^3-24}$; $\quad\dfrac{5x+10}{3x^2+6x+12}$

33 $\dfrac{y^2+5y-6}{y^2-1}$; $\quad\dfrac{y+6}{y-1}$

34 $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$; $\quad\dfrac{x}{1-x}$

35 $\dfrac{y-1}{x-y}$; $\quad\dfrac{y^2-1}{xy-x-y^2+y}$

Completa in modo che le seguenti coppie di frazioni siano equivalenti.

36 $\dfrac{x-2}{x-5}=\dfrac{2-x}{\dots}$ $\qquad \dfrac{y+1}{2-x}=-\dfrac{y+1}{\dots}$ $\qquad -\dfrac{x-3}{y-2}=\dfrac{\dots}{y-2}$

37 $-\dfrac{x-6}{y-1}=\dfrac{\dots}{1-y}$ $\qquad -\dfrac{4+x}{2x-1}=\dfrac{4+x}{\dots}$ $\qquad \dfrac{(x-1)^2}{(1-x)^2}=\dots$

38 $-\dfrac{(y-3)^3}{(3-y)^3}=\dots$ $\qquad \dfrac{(a-3)^3}{(3-a)^3}=\dots$ $\qquad -\dfrac{-(x+2y)}{x-y}=\dfrac{\dots}{y-x}$

LA SEMPLIFICAZIONE DELLE FRAZIONI ALGEBRICHE

la teoria è a pag. 4

Comprensione

39 Semplificando la frazione $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ si ottiene:

a. x^2+y^2 **b.** x^2-y^2 **c.** x^2-xy+y^2 **d.** x^2+xy+y^2

40 Semplificando la frazione $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ si ottiene:

a. $a+b$ **b.** $a-b$ **c.** $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ perché è irriducibile

41 Barra vero o falso.

a. Semplificando la frazione $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ si ottiene $a+b$. V F

b. Semplificando la frazione $\dfrac{2a+b}{2a-3c}$ si ottiene $\dfrac{b}{-3c}$. V F

c. Semplificando la frazione $\dfrac{5ab}{2a^2b}$ si ottiene $\dfrac{5}{2a}$. V F

d. Semplificando la frazione $\dfrac{2a^2-3ab^2}{6ab}$ si ottiene $\dfrac{2a-3b^2}{6b}$ V F

e. La frazione $\dfrac{x^2-9}{x^2+1}$ è irriducibile. V F

42 Scegli, fra quelli indicati, il risultato corretto della semplificazione delle seguenti frazioni:

a. $\dfrac{(x-1)^2}{(1-x)^2 b}$: ① $\dfrac{1}{b}$ ② $-\dfrac{1}{b}$ ③ nessuno dei precedenti

b. $\dfrac{(a-2b)^3}{(2b-a)^2}$: ① $a-2b$ ② $2b-a$ ③ nessuno dei precedenti

c. $\dfrac{ax-x^2}{ax}$: ① $-x^2$ ② x ③ nessuno dei precedenti

43 Associa a ciascuna frazione quella ad essa equivalente ottenuta semplificando:

a. $\dfrac{16a^3b^4}{24a^4b^4}$ **b.** $\dfrac{2a^2+ab}{a}$ **c.** $\dfrac{8a^3+b^3}{2a^2+ab}$ **d.** $\dfrac{-3b+ab^2}{a^2b^2-2ab-3}$

① $\dfrac{4a^2-2ab+b^2}{a}$ ② $\dfrac{b}{ab+1}$ ③ $\dfrac{2}{3a}$ ④ $2a+b$

Applicazione

N.B.: Negli esercizi che seguono sono sottointese le condizioni di esistenza.

Semplifica le seguenti frazioni algebriche.

44 **ESERCIZIO GUIDA**

- $\dfrac{6x^2y^3}{3x^4y}$

Per semplificare una frazione algebrica occorre dividere numeratore e denominatore per il *M.C.D.* dei due termini applicando la proprietà invariantiva.

In questo caso $M.C.D.(6x^2y^3,\ 3x^4y) = 3x^2y$, quindi $\dfrac{6x^2y^3 : 3x^2y}{3x^4y : 3x^2y} = \dfrac{2y^2}{x^2}$

Più semplicemente di solito si scrive così $\dfrac{{}^{2}\cancel{6}\cancel{x^2}\cancel{y^3}^{\,2}}{\cancel{3}x^{\cancel{4}\,2}\cancel{y}} = \dfrac{2y^2}{x^2}$

- $\dfrac{4a^2b^3}{xy}$

Numeratore e denominatore di questa frazione non hanno fattori comuni, perché *M.C.D.* $(4a^2b^2,\ xy) = 1$, la frazione è irriducibile.

45 $\dfrac{a^3bc}{ab}$; $\dfrac{4x^3y^4z}{16xy^5}$; $\dfrac{-7x^5y^7}{21x^4y^3}$ $\left[a^2c;\ \dfrac{x^2z}{4y};\ -\dfrac{1}{3}xy^4\right]$

46 $\dfrac{15a^6b^3c}{3a^4b}$; $\dfrac{18a^3b^2c^4}{-36a^7b^4c^5}$; $\dfrac{-20x^5y^8z^{10}}{30x^8y^6z^4}$ $\left[5a^2b^2c;\ -\dfrac{1}{2a^4b^2c};\ -\dfrac{2y^2z^6}{3x^3}\right]$

47 $\dfrac{5x^2y^3}{25x^4z}$; $\dfrac{-4a^6b^2}{-8a^{12}b^4}$; $\dfrac{t^{12}z^{10}}{-t^3z^{12}}$ $\left[\dfrac{y^3}{5x^2z};\ \dfrac{1}{2a^6b^2};\ -\dfrac{t^9}{z^2}\right]$

48 $\dfrac{3a^3x^2z}{9az^2}$; $\dfrac{8x^6}{4x^5}$; $\dfrac{2b^6y^4}{12b^6y}$ $\left[\dfrac{a^2x^2}{3z};\ 2x;\ \dfrac{y^3}{6}\right]$

49 $\dfrac{12a^7b^9c^{15}}{24b^8c^{11}}$; $\dfrac{8b^4ac^3}{-24b^5c^5}$; $\dfrac{2x^{18}y^{16}}{4x^{10}y^4}$ $\left[\dfrac{a^7bc^4}{2};\ -\dfrac{a}{3bc^2};\ \dfrac{x^8y^{12}}{2}\right]$

50 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{7x^3+7}{14x^2-14}$$

Per semplificare la frazione dobbiamo prima scomporre i polinomi al numeratore e al denominatore:

$$\frac{7(x^3+1)}{14(x^2-1)}=\frac{7(x+1)(x^2-x+1)}{14(x+1)(x-1)}$$

Dividiamo i termini della frazione per il fattore comune $7(x+1)$

$$\frac{\cancel{7}\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\underset{2}{\cancel{14}}\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{x^2-x+1}{2(x-1)}$$

51 $\dfrac{x^2+3x}{7x+21}$; $\quad\dfrac{5ab}{15a^2+15ab}$ $\quad\left[\dfrac{x}{7};\ \dfrac{b}{3(a+b)}\right]$

52 $\dfrac{3x}{3x+9}$; $\quad\dfrac{-5x+10}{x-2}$ $\quad\left[\dfrac{x}{x+3};\ -5\right]$

53 $\dfrac{5y-10}{5y}$; $\quad\dfrac{x^2+1}{x-1}$ $\quad\left[\dfrac{y-2}{y};\ \dfrac{x^2+1}{x-1}\right]$

54 $\dfrac{6xy+3y}{9y}$; $\quad\dfrac{-2x^2-2x}{5x+5}$ $\quad\left[\dfrac{2x+1}{3};\ -\dfrac{2x}{5}\right]$

55 $\dfrac{-a^2-2a}{-a}$; $\quad\dfrac{4a^2+4a+1}{4a^2-1}$ $\quad\left[a+2;\ \dfrac{2a+1}{2a-1}\right]$

56 $\dfrac{4a-4}{2-2a^2}$; $\quad\dfrac{1-2xy}{4x^2y^2-4xy+1}$ $\quad\left[-\dfrac{2}{a+1};\ \dfrac{1}{1-2xy}\right]$

57 $\dfrac{4z^3+16z+16z^2}{3z+6}$; $\quad\dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$ $\quad\left[\dfrac{4}{3}z(z+2);\ \text{irriducibile}\right]$

58 $\dfrac{4x^2-4x+1}{7x-2x^2-3}$; $\quad\dfrac{2x^3-16}{2x^2+4x+8}$ $\quad\left[\dfrac{1-2x}{x-3};\ x-2\right]$

59 $\dfrac{x^2-y^2}{3x^3y^3-3x^2y^4}$; $\quad\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-9}$ $\quad\left[\dfrac{x+y}{3x^2y^3};\ \dfrac{a+3}{a-3}\right]$

60 $\dfrac{4x^3-4x^2}{16x^3}$; $\quad\dfrac{12xy-16y^2}{6x-8y}$ $\quad\left[\dfrac{x-1}{4x};\ 2y\right]$

61 $\dfrac{3x^2+5x-2}{(1-3x)^2}$; $\quad\dfrac{2x^3-16}{2x^2+4x+8}$ $\quad\left[\dfrac{x+2}{3x-1};\ x-2\right]$

62 $\dfrac{ax-x-2a+2}{ax^2-x^2-4a+4}$; $\quad\dfrac{ax+ay-y-x}{ax^2-ay^2}$ $\quad\left[\dfrac{1}{x+2};\ \dfrac{a-1}{a(x-y)}\right]$

63 $\dfrac{3a^2y-6ay^2}{4a^2y-2a^3}$; $\quad\dfrac{x^2y^3z^2}{x^2+y^3+z^2}$ $\quad\left[-\dfrac{3y}{2a};\ \text{irriducibile}\right]$

64 $\dfrac{5x+5y}{3x+3y+ax+ay}$; $\quad\dfrac{(y-1)^2-2y+2}{4-(y-1)^2}$ $\quad\left[\dfrac{5}{3+a};\ \dfrac{1-y}{1+y}\right]$

65 $\dfrac{3ab+3a-3(b+1)^2}{b^2-1}$; $\quad\dfrac{4x^2-xy-4x+y}{1-x^2}$ $\quad\left[\dfrac{3(a-b-1)}{b-1};\ \dfrac{y-4x}{x+1}\right]$

66 $\dfrac{2-2y-y^2+y^3}{1-y+3y^2-3y^3}$; $\quad \dfrac{a^3-8-6a^2+12a}{a^3-8}$ $\quad \left[\dfrac{2-y^2}{1+3y^2};\ \dfrac{(a-2)^2}{a^2+2a+4}\right]$

67 $\dfrac{a^3-a^2+3a^2(a-1)}{16a^2+16-32a}$; $\quad \dfrac{7z^2-28}{2z^2+8+8z}$ $\quad \left[\dfrac{a^2}{4(a-1)};\ \dfrac{7(z-2)}{2(z+2)}\right]$

68 $\dfrac{100-81t^2}{-300t-243t^3+540t^2}$; $\quad \dfrac{25-9x^2}{25+9x^2+30x}$ $\quad \left[\dfrac{10+9t}{3t(9t-10)};\ \dfrac{5-3x}{5+3x}\right]$

69 $\dfrac{(3x-1)^2-(x-3)^2}{x^3-x^2+4x-4}$; $\quad \dfrac{24x^2-6}{8x^2-8x+2}$ $\quad \left[\dfrac{8(x+1)}{x^2+4};\ \dfrac{3(2x+1)}{2x-1}\right]$

70 $\dfrac{3x^2-75}{6x^2-36x+30}$; $\quad \dfrac{a^2+b^2}{2a^2-2b^2}$ $\quad \left[\dfrac{x+5}{2(x-1)};\ \text{irriducibile}\right]$

71 $\dfrac{y^3-3ay^2+3a^2y-a^3}{y^3-a^3}$; $\quad \dfrac{a^2+2a+1}{4a^2+28a+24}$ $\quad \left[\dfrac{(y-a)^2}{y^2+ay+a^2};\ \dfrac{a+1}{4(a+6)}\right]$

72 $\dfrac{ax^2-4a}{6x^2+24x+24}$; $\quad \dfrac{x^6+x^3y^4}{x^6-y^8}$ $\quad \left[\dfrac{a(x-2)}{6(x+2)};\ \dfrac{x^3}{x^3-y^4}\right]$

73 $\dfrac{x^2+9+6x}{-2x^2+6x+36}$; $\quad \dfrac{x^2+1+4y^2-2x+4xy-4y}{x^2+4y^2+4xy-1}$ $\quad \left[\dfrac{x+3}{2(6-x)};\ \dfrac{x-1+2y}{x+2y+1}\right]$

74 $\dfrac{a^2+2a+1-y^2}{(y+a)^2-1}$; $\quad \dfrac{8x^3+36x^2+54x+27}{24x^2-54}$ $\quad \left[\dfrac{a+1-y}{a+y-1};\ \dfrac{(2x+3)^2}{6(2x-3)}\right]$

75 $\dfrac{3a^3-a+1-3a^2}{9a^4-1}$; $\quad \dfrac{x^2-2xy-15y^2}{x^2-8xy+15y^2}$ $\quad \left[\dfrac{a-1}{3a^2+1};\ \dfrac{x+3y}{x-3y}\right]$

76 $\dfrac{2a-4}{4a^3-32-24a^2+48a}$; $\quad \dfrac{z^3+3z^2-4z-12}{3z^2+15z+18}$ $\quad \left[\dfrac{1}{2(a-2)^2};\ \dfrac{z-2}{3}\right]$

77 $\dfrac{(2a+6b)^3-8a^3}{72ab}$; $\quad \dfrac{27-x^3}{x^2-9}$ $\quad \left[\dfrac{a^2+3ab+3b^2}{a};\ -\dfrac{x^2+3x+9}{x+3}\right]$

78 $\dfrac{a^6-b^6}{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}$; $\quad \dfrac{32x^4+8y^4}{4x^4-y^4}$ $\quad \left[a^2-b^2;\ \text{irriducibile}\right]$

79 $\dfrac{x^2-2x-3}{9-x^2}$; $\quad \dfrac{(2a-2b)^2}{8a^3-8b^3}$ $\quad \left[-\dfrac{x+1}{x+3};\ \dfrac{a-b}{2(a^2+ab+b^2)}\right]$

80 $\dfrac{a^3+3a^2+3a+2}{9a^3-9}$; $\quad \dfrac{z^2-(a+b)z+ab}{z^2+a^2-2az}$ $\quad \left[\dfrac{a+2}{9(a-1)};\ \dfrac{z-b}{z-a}\right]$

81 $\dfrac{12ay-3y^2-12a^2}{y^2+ay-6a^2}$; $\quad \dfrac{5x^3+5y^3}{10(x-y)^2+10xy}$ $\quad \left[\dfrac{3(2a-y)}{y+3a};\ \dfrac{x+y}{2}\right]$

82 $\dfrac{8a^3-27b^3}{8a^3b+12a^2b^2+18ab^3}$; $\quad \dfrac{a^2-15a+56}{2a^2-2a-112}$ $\quad \left[\dfrac{2a-3b}{2ab};\ \dfrac{a-7}{2(a+7)}\right]$

83 $\dfrac{4x^3-8x^2-3x+9}{2x^3-3x^2-2x+3}$; $\quad \dfrac{a^4+a^3-a^2+a-2}{a^4-1}$ $\quad \left[\dfrac{2x-3}{x-1};\ \dfrac{a+2}{a+1}\right]$

84 $\dfrac{x^6-y^6}{(x^2-y^2)[(x^2+y^2)^2-x^2y^2]}$; $\quad \dfrac{x^2+1+y^4+2x-2y^2-2xy^2}{x^2-1-y^4+2y^2}$ $\quad \left[1;\ \dfrac{x-y^2+1}{-1+x+y^2}\right]$

85 $\dfrac{a^6 - a^3y^3}{a^4 + a^3 - ay^3 - y^3}$; $\dfrac{16b^2 - (2a+b)^2}{2ab - 3b^2 - 2a + 3b}$ $\left[\dfrac{a^3}{a+1}; \dfrac{2a+5b}{1-b}\right]$

86 $\dfrac{4 + (2z-1)^2 + 4(2z-1)}{8z^3 + 1 + 12z^2 + 6z}$; $\dfrac{4x^4 + 4x^3 - 80x^2}{8x^5 + 32x^4 - 40x^3}$ $\left[\dfrac{1}{2z+1}; \dfrac{x-4}{2x(x-1)}\right]$

87 $\dfrac{5x^2 - 5xy - 3x + 3y}{5x^2 + 5xy - 3x - 3y}$; $\dfrac{x^4 - y^4 + x^2 - y^2}{x^3 + xy^2 + x + yx^2 + y^3 + y}$ $\left[\dfrac{x-y}{x+y}; x-y\right]$

88 $\dfrac{a^4 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - 2b^4}{a^4 - b^4}$; $\dfrac{x^2 - (2+a)x + 2a}{\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}}$ $\left[\dfrac{a+2b}{a+b}; \dfrac{5(x-a)}{x-2}\right]$

89 $\dfrac{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$; $\dfrac{2x^2 + 5x - 12}{2x^3 + 4x - 3x^2 - 6}$ $\left[\dfrac{2x+1}{x+1}; \dfrac{x+4}{x^2+2}\right]$

90 $\dfrac{a^3 + 2a^2 - 13a + 10}{(a^2 + 1 - 2a)(3a^2 + 9a - 30)}$; $\dfrac{2a^3 + a^2 - 2ab^2 - b^2}{2a^2 - 2ab + a - b}$ $\left[\dfrac{1}{3(a-1)}; a+b\right]$

CORREGGI GLI ERRORI

91 $\dfrac{\cancel{3}x + y}{\cancel{3}} = x + y$

92 $\dfrac{x^{\cancel{2}} - y^{\cancel{2}}}{\cancel{x} - \cancel{y}} = x - y$

93 $\dfrac{4x^{\cancel{6}2}y^{\cancel{2}}}{3x^{\cancel{3}}y^{\cancel{8}4}} = \dfrac{4x^2y}{3xy^4}$

94 $\dfrac{4(a-1)}{2(1-a^2)} = \dfrac{{}^{2}\cancel{4}\cancel{(a-1)}}{\cancel{2}\cancel{(1-a)}(1+a)} = \dfrac{2}{1+a}$

95 $\dfrac{a^{\cancel{2}} + b^{\cancel{2}}}{\cancel{a} + \cancel{b}} = a + b$

96 $\dfrac{\cancel{x^2 + y^2}}{\cancel{(x+y)^2}} = 1$

97 $\dfrac{(x+2)\cancel{(3x-1)}}{(1-3x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x+2}{1-3x}$

98 $\dfrac{x(x-y) + \cancel{2x}}{\cancel{2x}} = x(x-y)$

99 $\dfrac{\cancel{5a}(a+b)}{\cancel{5a} - 1} = \dfrac{a+b}{-1}$

100 $\dfrac{\cancel{x+y}}{(x+y)^{\cancel{2}} + 1} = \dfrac{1}{x+y+1}$

101 $\dfrac{\cancel{x}(a-b) + y}{\cancel{x}} = a - b + y$

102 $\dfrac{a^6 - b^4}{a^6 - a^3b^2 + b^2} = \dfrac{\cancel{(a^3 - b^2)}(a^3 + b^2)}{a^3\cancel{(a^3 - b^2)} + b^2} = \dfrac{a^3 + b^2}{a^3 + b^2} = 1$

L'ADDIZIONE E LA SOTTRAZIONE

la teoria è a pag. 6

RICORDA

- Se due frazioni hanno lo stesso denominatore: $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{B} = \dfrac{A+C}{B}$
- se due frazioni hanno denominatori diversi, per eseguire l'addizione o la sottrazione si devono trovare le frazioni ad esse equivalenti che hanno lo stesso denominatore; come denominatore comune si sceglie il *m.c.m.* fra i denominatori.

Comprensione

103 Il denominatore comune fra le seguenti frazioni $\dfrac{3}{2x-1}$, $\dfrac{x}{2-x}$, $\dfrac{1-x}{2x^2-5x+2}$ è:

a. $(2x-1)(x-2)$ **b.** $(2x^2-5x+2)(2x-1)(2-x)$

c. $(2x^2-5x+2)(2-x)$ **d.** $(2x^2-5x+2)(2x-1)$

104 Considerate le seguenti frazioni $\dfrac{x}{x+1}$ $\dfrac{x-1}{x}$ $\dfrac{x+1}{x^2}$:

a. il *m.c.m.* fra i denominatori è:

① $x(x+1)$ ② $x^3(x+1)$ ③ $x^2(x+1)$ ④ x^2

b. riducendole allo stesso denominatore si ottiene:

① $\dfrac{x^2}{x^2(x+1)}$ $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)}$ $\dfrac{(x+1)^2}{x^2(x+1)}$ ② $\dfrac{x^2+1}{x^2}$ $\dfrac{x(x-1)}{x^2}$ $\dfrac{x+1}{x^2}$

③ $\dfrac{x^2}{x(x+1)}$ $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)}$ $\dfrac{x+1}{x(x+1)}$ ④ $\dfrac{x^3}{x^2(x+1)}$ $\dfrac{x(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)}$ $\dfrac{(x+1)^2}{x^2(x+1)}$

105 Eseguendo l'addizione $\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{x-1}$ si ottiene:

a. $\dfrac{2+x}{x-1}$ **b.** $\dfrac{2+x-1}{x}$ **c.** $\dfrac{2(x-1)+x}{x(x-1)}$ **d.** $\dfrac{2(x-1)+x^2}{x(x-1)}$

Applicazione

Riduci allo stesso denominatore i gruppi di frazioni dei seguenti esercizi.

106 **ESERCIZIO GUIDA**

- $\dfrac{2}{3a}$ $\dfrac{5b}{2a^2}$ $\dfrac{a}{b^2}$

Le frazioni assegnate sono irriducibili; il *m.c.m.* fra i denominatori è $6a^2b^2$; dividiamo $6a^2b^2$ per ciascun denominatore e moltiplichiamo il quoziente ottenuto per ciascun numeratore:

$$\frac{2}{3a}=\frac{2\cdot 2ab^2}{6a^2b^2}=\frac{4ab^2}{6a^2b^2}\qquad \frac{5b}{2a^2}=\frac{5b\cdot 3b^2}{6a^2b^2}=\frac{15b^3}{6a^2b^2}\qquad \frac{a}{b^2}=\frac{a\cdot 6a^2}{6a^2b^2}=\frac{6a^3}{6a^2b^2}$$

- $\dfrac{x+a}{x^2-1}$ $\dfrac{x-ax}{x^3-x^2}$ $\dfrac{x+a}{x}$

Semplifichiamo dapprima la seconda frazione e scomponiamo il denominatore della prima:

$$\frac{x+a}{(x-1)(x+1)}\qquad \frac{x-ax}{x^3-x^2}=\frac{\cancel{x}(1-a)}{x^{\cancel{2}}(x-1)}=\frac{1-a}{x(x-1)}\qquad \frac{x+a}{x}$$

Il *m.c.m.* fra i denominatori delle tre frazioni è $x(x-1)(x+1)$, quindi:

$$\frac{x+a}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(x+a)}{x(x-1)(x+1)}\qquad \frac{1-a}{x(x-1)}=\frac{(1-a)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}\qquad \frac{x+a}{x}=\frac{(x+a)(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

107 $\dfrac{7}{x}$; $\dfrac{2a}{y}$; $\dfrac{3}{2x^2y}$ $\left[\dfrac{14xy}{2x^2y};\ \dfrac{4ax^2}{2x^2y};\ \dfrac{3}{2x^2y}\right]$

108 $-\dfrac{2}{x^2}$; $\dfrac{a}{2x}$; $\dfrac{b}{3x^3}$ $\left[-\dfrac{12x}{6x^3};\ \dfrac{3ax^2}{6x^3};\ \dfrac{2b}{6x^3}\right]$

109 $\dfrac{4a^2}{a^5}$; $\dfrac{6}{2a}$; $\dfrac{8}{a^2}$ $\left[\dfrac{4}{a^3};\ \dfrac{3a^2}{a^3};\ \dfrac{8a}{a^3}\right]$

110 $\frac{a}{2yx^2}$; $\frac{x+y}{8xy^2}$; $\frac{b}{4x^2y^2}$ $\left[\frac{4ay}{8x^2y^2}; \frac{x(x+y)}{8x^2y^2}; \frac{2b}{8x^2y^2}\right]$

111 $\frac{1}{x+y}$; $\frac{3a}{2x+2y}$; $\frac{7}{3x+3y}$ $\left[\frac{6}{6(x+y)}; \frac{9a}{6(x+y)}; \frac{14}{6(x+y)}\right]$

112 $\frac{a+b}{7a-7b}$; $\frac{5a}{5a-5b}$; $\frac{2b}{2a-2b}$ $\left[\frac{(a+b)}{7(a-b)}; \frac{7a}{7(a-b)}; \frac{7b}{7(a-b)}\right]$

113 $\frac{-y^2}{3x^2-3y^2}$; $\frac{2y+2x}{6x-6y}$; $\frac{3x^2}{9x+9y}$ $\left[\frac{-y^2}{3(x^2-y^2)}; \frac{(x+y)^2}{3(x^2-y^2)}; \frac{x^2(x-y)}{3(x^2-y^2)}\right]$

114 $\frac{1-a}{a^2-1}$; $\frac{3a}{a^2+2a+1}$; $\frac{4}{2a+2}$ $\left[\frac{-(a+1)}{(a+1)^2}; \frac{3a}{(a+1)^2}; \frac{2(a+1)}{(a+1)^2}\right]$

115 $\frac{4}{a^2-3a}$; $\frac{a-3}{2a}$; $\frac{5a}{2a-6}$ $\left[\frac{8}{2a(a-3)}; \frac{(a-3)^2}{2a(a-3)}; \frac{5a^2}{2a(a-3)}\right]$

116 $\frac{3+2a}{4a^2+9+12a}$; $\frac{5a}{10a+15}$; $\frac{-7a^2}{4a^2-9}$ $\left[\frac{2a-3}{(2a-3)(2a+3)}; \frac{a(2a-3)}{(2a-3)(2a+3)}; \frac{-7a^2}{(2a-3)(2a+3)}\right]$

117 $\frac{x-2}{-6x+6y}$; $\frac{y+1}{x^2-y^2}$; $\frac{2}{3x+3y}$ $\left[\frac{(2-x)(x+y)}{6(x^2-y^2)}; \frac{6(y+1)}{6(x^2-y^2)}; \frac{4(x-y)}{6(x^2-y^2)}\right]$

118 $\frac{2-3x}{9x^2+4-12x}$; $\frac{4y}{24x-16}$; $\frac{-3x^2}{9x^2-4}$ $\left[\frac{2(2+3x)}{2(4-9x^2)}; \frac{-y(2+3x)}{2(4-9x^2)}; \frac{6x^2}{2(4-9x^2)}\right]$

Esegui le addizioni e sottrazioni fra le seguenti frazioni algebriche.

119 **ESERCIZIO GUIDA**

$\frac{x+3y}{2x} + \frac{2y-x}{6y} =$ Il *m.c.m.* fra i denominatori è $6xy$

$$= \frac{3y(x+3y)+x(2y-x)}{6xy} = \frac{3xy+9y^2+2xy-x^2}{6xy} = \frac{9y^2+5xy-x^2}{6xy}$$

120 $\frac{4x}{y} - \frac{9x}{4y}$; $\frac{a}{2b} + 5 - \frac{3a}{2b^2}$ $\left[\frac{7x}{4y}; \frac{ab+10b^2-3a}{2b^2}\right]$

121 $2x + \frac{3x}{y} - \frac{4x}{2}$; $\frac{2a+3}{8a} - \frac{a-2}{4a^2}$ $\left[\frac{3x}{y}; \frac{2a^2+a+4}{8a^2}\right]$

122 $\frac{3}{2x} + \frac{4}{3y}$; $\frac{x}{9} + \frac{2y}{27} - xy$ $\left[\frac{9y+8x}{6xy}; \frac{3x+2y-27xy}{27}\right]$

123 $\frac{1}{2z} + \frac{2}{3z} - \frac{1}{z}$; $\frac{5}{12a^2} + \frac{1}{4a} - \frac{2}{4a^2}$ $\left[\frac{1}{6z}; \frac{3a-1}{12a^2}\right]$

124 $\frac{3}{a} + \frac{a-6}{2a} - \frac{1}{3}$; $\frac{9}{a^3b} - \frac{a^2}{a^3b^3}$ $\left[\frac{1}{6}; \frac{9b^2-a^2}{a^3b^3}\right]$

125 $-3b + \frac{1}{2a}$; $\frac{3x+1}{4} - \frac{x-1}{6} + \frac{x+2}{3}$ $\left[\frac{1-6ab}{2a}; \frac{11x+13}{12}\right]$

126 $\frac{5}{a^2} - 1$; $\frac{3}{10ab^2} - \frac{2}{5a^2} + \frac{1}{2b^2}$ $\left[\frac{5-a^2}{a^2}; \frac{3a-4b^2+5a^2}{10a^2b^2}\right]$

127 $\frac{x-4y}{15}+\frac{x-y}{3}-\frac{3x-4y}{5}$; $\quad -\frac{7a-5b}{8}+\frac{5a-3b}{2}-a$ $\quad \left[\frac{y-x}{5};\ \frac{5a-7b}{8}\right]$

128 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{x-2}{x+1}-\frac{x}{x-1}$$

Il m.c.m. fra i denominatori è $(x+1)(x-1)$: $\quad \frac{(x-2)(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

Svolgiamo il calcolo al numeratore: $\quad \frac{x^2-x-2x+2-x^2-x}{(x+1)(x-1)}=\frac{-4x+2}{(x+1)(x-1)}$

La frazione ottenuta è irriducibile.

129 $\frac{y}{2y-3}-3$; $\quad 1-\frac{x+a}{x-a}$ $\quad \left[\frac{9-5y}{2y-3};\ \frac{2a}{a-x}\right]$

130 $\frac{1}{z-3}+\frac{4}{5z-15}$; $\quad \frac{3}{ab}-\frac{2}{ab-1}$ $\quad \left[\frac{9}{5(z-3)};\ \frac{ab-3}{ab(ab-1)}\right]$

131 $\frac{x+2}{x^2-9}+\frac{2}{3x+9}$; $\quad \frac{2x-4y}{20xy}-\frac{8y+3z}{30yz}$ $\quad \left[\frac{5x}{3(x^2-9)};\ \frac{3z+4x}{-15xz}\right]$

132 $\frac{3}{7a+7}-\frac{a-5}{14a+14}$; $\quad \frac{a}{x+1}+\frac{a+b}{x^2-1}-\frac{b}{x-1}$ $\quad \left[\frac{11-a}{14(a+1)};\ \frac{x(a-b)}{(x^2-1)}\right]$

133 $\frac{1}{2x-5}+\frac{1}{2x+5}-\frac{10}{4x^2-25}$; $\quad \frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{5x-5}$ $\quad \left[\frac{2}{2x+5};\ \frac{9}{10(x-1)}\right]$

134 $\frac{3}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{y+2}$; $\quad \frac{2x}{x+3}-\frac{3x-1}{2x+6}+\frac{3}{3x+9}$ $\quad \left[\frac{y+6}{y^2(y+2)};\ \frac{1}{2}\right]$

135 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{3}{y-2}+\frac{9}{10-5y}-\frac{y+2}{y^2-4}$$

Scomponiamo i denominatori $\quad \frac{3}{y-2}+\frac{9}{5(2-y)}-\frac{y+2}{(y+2)(y-2)}$

Osserviamo che il denominatore della seconda frazione differisce da quello della prima (e anche della terza) per il segno e che inoltre la terza frazione, supponendo $y+2\neq 0$, può essere semplificata. Ottieni così

$$\frac{3}{y-2}-\frac{9}{5(y-2)}-\frac{1}{(y-2)} \qquad \left[\frac{1}{5(y-2)}\right]$$

136 $\frac{a-1}{a+1}-\frac{15a+11}{1-a^2}+\frac{3a}{a-1}$; $\quad \frac{4b}{b-y}+\frac{5b}{b+y}-\frac{8by}{b^2-y^2}$ $\quad \left[\frac{4(a+3)}{a-1};\ \frac{9b}{b+y}\right]$

137 $\frac{2-ay}{y^2-1}+\frac{6a+1}{y+1}-\frac{5a+1}{y-1}$; $\quad \frac{2y^2-xy}{2x-4y}+\frac{x^2-2xy}{6y-3x}+\frac{y}{2}$ $\quad \left[-\frac{11a}{y^2-1};\ -\frac{x}{3}\right]$

138 $\frac{1}{y-1}+\frac{5-y}{2y^2-2}+\frac{3}{6y+6}$; $\quad \frac{1}{x-1}+x^2+x+1$ $\quad \left[\frac{y+3}{y^2-1};\ \frac{x^3}{x-1}\right]$

139 $2-\frac{a+3b}{a-3b}-\frac{a-3b}{a+3b}$; $\quad \frac{3a-x}{3x+9a}+\frac{x-a}{5x+15a}+\frac{2}{15}$ $\quad \left[\frac{-36b^2}{a^2-9b^2};\ \frac{6a}{5(x+3a)}\right]$

140 $\frac{4a^2}{a^3-a}-\frac{1}{3a+3}+\frac{4}{1-a}$; $\quad -\frac{7}{x+3y}-\left(\frac{42y}{x^2-9y^2}-\frac{7}{x-3y}\right)$ $\quad \left[\frac{a+11}{3(1-a^2)};\ 0\right]$

141 $\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{6}\right)$ $\left[-\frac{4x^2+5x-1}{6x^2}\right]$

142 $\frac{1}{a-b-1}+\frac{1}{a-b+1}+\frac{a^2+b^2-2ab+1}{a^2+b^2-2ab-1}$ $\left[\frac{a-b+1}{a-b-1}\right]$

143 $\frac{3x}{y^2-2xy+x^2}-\frac{3}{x-y}+\frac{9}{2y-2x}$ $\left[\frac{3(5y-3x)}{2(x-y)^2}\right]$

144 $\frac{4y+x}{xy}-\left[\frac{x-y}{y(x-2y)}-\frac{1}{x-2y}+\frac{4}{xy}\right]$ $\left[\frac{4(y-1)}{xy}\right]$

145 $\frac{x^2-1}{3x^2-10x+3}-\left(\frac{1}{1-3x}+\frac{1}{x-3}\right)$ $\left[\frac{x+1}{3x-1}\right]$

146 $\frac{x}{x^2-8x+15}-\frac{4x}{x^2-2x-15}-\frac{3x}{x^2-9}$ $\left[\frac{6x}{9-x^2}\right]$

147 $\frac{2y-4}{y^3-8-6y^2+12y}-\frac{y-1}{y^2+4-4y}+\frac{1}{y-2}$ $\left[\frac{1}{(y-2)^2}\right]$

148 $\frac{2x(x+1)}{x^3-8}+\frac{x^2}{2x^2+4x+8}-\frac{x}{4-2x}$ $\left[\frac{x}{x-2}\right]$

149 $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}+\frac{1-x^2}{x^2+2x+1}-\frac{4x^2}{x^2-1}$ $\left[-\frac{4x}{x+1}\right]$

150 $\frac{a+b}{ab-b^2}-\frac{a-b}{b^2+ab}-\left(\frac{5a+b}{a^2-b^2}-\frac{1}{b}\right)$ $\left[\frac{a-2b}{b(a-b)}\right]$

151 $\frac{y^2-1}{y-2}-\frac{y^2-4y+4}{y-1}-\frac{5y^2-17}{y^2-3y+2}$ $\left[\frac{13}{1-y}\right]$

152 $\frac{x+2}{4}-\frac{x^3-8-6x^2+12x}{4x^2+16+16x}-\frac{3x^2-1}{x^2+4+4x}$ $\left[\frac{5}{(x+2)^2}\right]$

153 $\frac{24x}{x^2+3x-4}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}-\frac{18(x-1)}{x^2+2x-8}$ $\left[\frac{7(x+1)}{(x+4)(x-1)}\right]$

154 $\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{x+3}{x^2-2x-3}+\frac{x^2+6x+1}{x^3-9x-9+x^2}$ $\left[\frac{1}{x+1}\right]$

155 $\frac{a^3-y^3}{a^3+3ay^2-3a^2y-y^3}+\frac{ay}{a^2-2ay+y^2}+\frac{a+y}{y-a}$ $\left[\frac{2y(a+y)}{(a-y)^2}\right]$

156 $\frac{1-x}{2x^2+x-1}-\frac{1}{2x^2-3x+1}+\frac{2x}{x^2-1}$ $\left[\frac{3x+2}{(2x-1)(x+1)}\right]$

157 $\frac{3}{3b+1}+\frac{1}{2a+1}-\frac{2a+3b+2}{6ab+2a+3b+1}$ $\left[\frac{2}{3b+1}\right]$

158 $\frac{9x^2+4y^2-12xy}{x-y}-\left(\frac{9x^2+4y^2+12xy}{x+y}-6y\right)$ $\left[\frac{2y^3}{x^2-y^2}\right]$

159 $\frac{2y(x-y)}{y^3-x^3-3xy^2+3x^2y}+\frac{x+y}{x^2+y^2-2xy}+\frac{1}{x-y}$ $\left[\frac{2}{x-y}\right]$

160 $\frac{a-5}{a^2-9}+\frac{1}{a+3}-\left(\frac{1}{3a-a^2}+\frac{1}{a}\right)-\frac{a^2+a-4}{a^2+3a}$ $\left[-\frac{a}{a+3}\right]$

161 $\left(\dfrac{2}{y^2-9y+20}-\dfrac{2}{25-y^2}\right)-\left[\dfrac{4}{y^2+y-20}-\dfrac{y-26}{(y^2-25)(y-4)}\right]$ $\left[\dfrac{1}{y^2-25}\right]$

162 $\left[\dfrac{4a(y-a)}{y^3+8a^3}+\dfrac{1}{y+2a}\right]-\left(\dfrac{y-a}{y^2-2ay+4a^2}-\dfrac{2y^2-5ay+6a^2}{8a^3+y^3}\right)$ $\left[\dfrac{2}{y+2a}\right]$

163 $\dfrac{-12}{x^2+y^2+2xy-4}+\left(\dfrac{3}{x+y-2}-\dfrac{2}{x+y+2}\right)$ $\left[\dfrac{1}{x+y+2}\right]$

164 $\dfrac{x-y}{2}-\left(\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2+2xy}-\dfrac{y^4}{2x^3+2y^3+6x^2y+6xy^2}\right)$ $\left[\dfrac{x^4}{2(x+y)^3}\right]$

165 $\dfrac{3y-21}{2y^2-20y+42}-\left(\dfrac{y+2}{y^2-y-6}+\dfrac{1}{3y-9}\right)$ $\left[\dfrac{1}{6(y-3)}\right]$

166 $\dfrac{y+2x}{6xy+3y^2-2x-y}+\dfrac{1}{4x+2y}-\left(\dfrac{1-3y}{6y-9y^2-1}-\dfrac{3}{2x+y}\right)$ $\left[\dfrac{7}{2(2x+y)}\right]$

167 $\dfrac{2-b}{2+b}+\left[\dfrac{y(b+2)}{by-b+2y-2}+\dfrac{2(2y-b)}{2y^2+by^2-2-b}\right]$ $\left[\dfrac{1}{1+y}\right]$

168 $\dfrac{2x-3y}{x-3y}-\left[\dfrac{3(x-y)}{2x-3y}+\dfrac{9y^2}{2x^2-9xy+9y^2}\right]-\dfrac{x}{2x-3y}$ $\left[\dfrac{3y}{2x-3y}\right]$

169 $\left(\dfrac{3x-2}{x^2-4x+3}-\dfrac{1-x}{x^2+x-2}\right)-\left[\dfrac{5x-4}{-x^2+4x-3}+\dfrac{8x^2+7x-3}{(x^2-4x+3)(x+2)}\right]$ $\left[\dfrac{1}{x-1}\right]$

170 $\dfrac{4y}{y^3-27-9y^2+27y}+\left[\dfrac{2}{y-3}-\dfrac{2y+1}{y^2-6y+9}+\dfrac{3y-10}{(y-3)^3}\right]$ $\left[\dfrac{11}{(y-3)^3}\right]$

171 $\dfrac{3a}{x^2+1-2x-a^2}-\left(\dfrac{3}{2x-2-2a}+\dfrac{5}{3x-3+3a}\right)$ $\left[\dfrac{1}{6(x-1+a)}\right]$

172 $\dfrac{x^2}{x^3+x^2-4x-4}-\left(\dfrac{-x}{x^3-x^2-4x+4}+\dfrac{5x}{x^4-5x^2+4}\right)$ $\left[\dfrac{x}{x^2-1}\right]$

173 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2(x-1)}{1+x}-\left[\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2x+1}{x^3-x}-\dfrac{(x+1)^2}{x^2-2x+1}+\dfrac{3\left(x^3-\dfrac{5}{3}\right)-5x(x-3)}{x^3-x^2-x+1}\right]$ $\left[\dfrac{2}{(x+1)}\right]$

CORREGGI GLI ERRORI

174 $x+\dfrac{a}{a+x}=\dfrac{ax+x+a}{a+x}$

175 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{y+3x}{x+y}$

176 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{2a+1}=\dfrac{6+a}{2a+1}$

177 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{x^2-x^2+x}{x^3}$

178 $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{-x+y+2x}{x(x+y)}$

179 $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x+3}{x^2-4}=\dfrac{x(x+2)-x+3}{(x-2)(x+2)}$

180 $\dfrac{2xy}{x+y}+\dfrac{3x}{x-y}=\dfrac{2xy}{x+y}-\dfrac{3x}{x+y}=\dfrac{2xy-3x}{x+y}$

181 $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x-3}{x^2-1}=\dfrac{x\cancel{(x+1)}-(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$

182 $\dfrac{3}{2a-b}+\dfrac{4a}{b-2a}=\dfrac{3+4a}{2a-b}$

183 $\dfrac{2}{y}-\dfrac{3y-4}{y+1}=\dfrac{2y+2-3y^2-4y}{y(y+1)}$

RICORDA

- $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$
- $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$
- $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$

Comprensione

184 Individua quale, fra le seguenti, è la reciproca della frazione $\frac{-3}{x-2}$:

a. $\frac{3}{x-2}$ **b.** $\frac{x-2}{3}$ **c.** $\frac{2-x}{3}$ **d.** nessuna delle precedenti

185 La frazione $\frac{A}{B}$ e la frazione $\frac{B}{A}$ hanno lo stesso insieme di definizione? Motiva la risposta.

186 Il risultato della seguente moltiplicazione $\frac{x^2-9}{3x+3} \cdot \frac{5x+5}{x^2+9}$ è:

a. $\frac{5}{3}$ **b.** $-\frac{5}{3}$ **c.** $\frac{5(x+3)}{3(x-3)}$ **d.** $\frac{5(x^2-9)}{3(x^2+9)}$

187 L'espressione $\frac{a+3}{a-3} : \left(\frac{a^2+9}{a^2-9} - \frac{a+3}{a-3}\right)$ è equivalente a:

a. $\frac{a+3}{a-3} \cdot \left(\frac{a^2-9}{a^2+9} - \frac{a-3}{a+3}\right)$ **b.** $\frac{a+3}{a-3} \cdot \left(\frac{a^2-9}{a^2+9} - \frac{a+3}{a-3}\right)$

c. $\frac{a+3}{a^2-9} : \frac{a^2+9}{a^2-9} - \frac{a+3}{a^2-9} : \frac{a+3}{a-3}$ **d.** nessuna delle precedenti

188 Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o sono false.

a. $\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2}$ V F

b. $\left[\frac{(x-y)(a-2b)}{x(a+b)}\right]^{-2} = -\frac{(x-y)^2(a-2b)^2}{x^2(a+b)^2}$ V F

c. $\left[\frac{x(x+1)}{x^2-4}\right]^{-3} = \frac{(x^2-4)^3}{x^3(x+1)^3}$ V F

189 L'espressione $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1}$ è equivalente a:

a. $a+b$ **b.** $\frac{1}{a+b}$ **c.** $\frac{a+b}{ab}$ **d.** $\frac{ab}{a+b}$

190 Inserisci al posto dei puntini il simbolo $=$ o il simbolo $\neq$ a seconda dei casi:

a. $(a^3+b^3)^{-1} \ldots\ldots \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ **b.** $\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{x}\right)^{-1} \ldots\ldots \frac{2}{3} + \frac{x}{a}$

c. $(x+y)^{-1} \ldots\ldots \frac{1}{x+y}$ **d.** $\left(\frac{1}{x} - 2\right)^{-1} \ldots\ldots \frac{x}{1-2x}$

Applicazione

La moltiplicazione

Esegui le seguenti moltiplicazioni fra frazioni algebriche e calcola il valore delle espressioni.

191 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{12a^2b}{xy}\cdot\frac{5x^2y}{9a^3}$$

Eseguiamo una semplificazione incrociata $12a^2b$ con $9a^3$ e $5x^2y$ con xy

Otteniamo: $\dfrac{\overset{4}{\cancel{12}}\cancel{a^2}b}{\cancel{x}\cancel{y}}\cdot\dfrac{5x^{\cancel{2}}\cancel{y}}{\underset{3}{\cancel{9}}a^{\cancel{3}}}=\dfrac{20bx}{3a}$

192 $\dfrac{a^2b^3}{x^3z^3}\cdot\dfrac{x^2z^2}{a^2b^2}$; $\quad\dfrac{3bc^2}{7a}\cdot\dfrac{14a^2}{6b^2c}$ $\quad\left[\dfrac{b}{xz};\ \dfrac{ac}{b}\right]$

193 $\dfrac{3x^2}{2y^2}\cdot\dfrac{4y^3z^2}{x}$; $\quad\dfrac{a^2b^5}{c^3}\cdot\dfrac{c^5}{a^3b^5}$ $\quad\left[6xyz^2;\ \dfrac{c^2}{a}\right]$

194 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8a^4b^4}{x^3y^4}\cdot\dfrac{xy^6}{4a^3b^2}$; $\quad-\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{a^4b^2c^3}{ay^4}\cdot\dfrac{49}{bc^3}$ $\quad\left[\dfrac{ab^2y^2}{x^2};\ \dfrac{-7a^3b}{y^4}\right]$

195 $\dfrac{4a^2}{b^3c^2}\left(-\dfrac{b^2c}{a^2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}ac\right)$; $\quad\left(-\dfrac{y^3}{16}\right)\cdot\dfrac{8a^4x^2}{y}\cdot\dfrac{4x}{a^3y^2}$ $\quad\left[\dfrac{2a}{b};\ -2ax^3\right]$

196 $\dfrac{1}{12a^2}\left(-\dfrac{7a^2b^2}{5}\right)\left(-\dfrac{60a^3}{b^3}\right)$; $\quad\dfrac{2x-4}{x}\cdot\dfrac{3x^3}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{9}$ $\quad\left[\dfrac{7a^3}{b};\ \dfrac{2}{3}x^2\right]$

197 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{x^2-2x-3}{2x^2-2x}\cdot\frac{3x^2-4x+1}{x^2-x-6}\cdot\frac{4x^2}{3x^2-x}$$

Scomponiamo i polinomi: $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2x(x-1)}\cdot\dfrac{(x-1)(3x-1)}{(x-3)(x+2)}\cdot\dfrac{4x^2}{x(3x-1)}$

Semplifichiamo: $\dfrac{(x+1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{2x}\cancel{(x-1)}}\cdot\dfrac{\cancel{(x-1)}\cancel{(3x-1)}}{\cancel{(x-3)}(x+2)}\cdot\dfrac{\overset{2}{\cancel{4x^2}}}{\cancel{x}\cancel{(3x-1)}}$

Moltiplichiamo: $\dfrac{2(x+1)}{x+2}$

198 $\dfrac{2(x+y)}{3y}\cdot\dfrac{6xy}{x+y}$; $\quad\dfrac{3a}{x^2+1}\cdot\dfrac{3(x^2+1)}{a-1}$ $\quad\left[4x;\ \dfrac{9a}{a-1}\right]$

199 $\dfrac{3a+3}{8}\cdot\dfrac{16}{4a+4}$; $\quad\dfrac{x^2-1}{3x}\cdot\dfrac{6x^2}{x+1}$ $\quad\left[\dfrac{3}{2};\ 2x(x-1)\right]$

200 $\dfrac{ax+a-x-1}{ax-a-2x+2}\cdot\dfrac{ax-2a-2x+4}{x^2-x-2}$; $\quad\dfrac{9}{3x-12}\cdot\dfrac{x^2-16}{3x^2+48+24x}$ $\quad\left[\dfrac{a-1}{x-1};\ \dfrac{1}{x+4}\right]$

201 $\dfrac{x^2-x+xy-y}{2x^2-2xy-2x+2y}\cdot\dfrac{x^2-2xy+y^2}{3x-3y}$; $\quad\dfrac{x^3+27}{x^3-9x}\cdot\dfrac{x-3}{9-3x+x^2}$ $\quad\left[\dfrac{x+y}{6};\ \dfrac{1}{x}\right]$

202 $\dfrac{2y^2-18}{b-4}\cdot\dfrac{b^2-8b+16}{2y-6}$; $\quad\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2}{y-x}\cdot\dfrac{1}{x^2+xy}$ $\quad\left[(b-4)(y+3);\ -\dfrac{x}{x^2+y^2}\right]$

203 $\dfrac{x^4-81}{x^3+27+9x^2+27x}\cdot\dfrac{x^2+x-6}{27+3x^2}\cdot\dfrac{6x+18}{2x^2-8}$ $\quad\left[\dfrac{x-3}{x+2}\right]$

204 $\dfrac{3x^6}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{2a^2-4ab+2b^2}{12x^4}\cdot\dfrac{3a+3b}{6a-6b}$ $\quad\left[\dfrac{x^2}{4}\right]$

205 $\dfrac{3x^2-48}{x^3-x^2-9x+9}\cdot\dfrac{x^2-9}{3x-12}\cdot\dfrac{x^2+1-2x}{5x+20}$ $\quad\left[\dfrac{x-1}{5}\right]$

206 $\dfrac{a^2-3a+2}{2a-1}\cdot\dfrac{8a^3-1}{4a^2-4a-8}\cdot\dfrac{24a+24}{12a^2+6a+3}$ $\quad[2(a-1)]$

207 $\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{a^3+4a^2b+4ab^2}\cdot\dfrac{ab+2b^2}{9a^2b-36ab^2+36b^3}\cdot\dfrac{3a^3-12ab^2}{2b-2a}$ $\quad\left[-\dfrac{1}{6}\right]$

208 $\dfrac{4a^2-16}{a^3-8}\cdot\dfrac{a^2x+4x+2ax-4-2a-a^2}{3x-2-x^2}\cdot\dfrac{x^2-5x+6}{2a+4}$ $\quad[2(3-x)]$

209 $\dfrac{z^2-4z+3}{y^2+3y+2}\cdot\dfrac{y^3+6y^2+12y+8}{z^3-27}\cdot\dfrac{3z^2+9z+27}{zy+2z-y-2}$ $\quad\left[\dfrac{3(y+2)}{y+1}\right]$

210 $\left(\dfrac{x}{a}-1\right)\left(\dfrac{x}{a}+1\right)\left(\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4x}\right)$ $\quad\left[\dfrac{3}{a}\right]$

211 $\left(x-5-\dfrac{4}{x-2}\right)\left(\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{2-x}{x-6}\right)\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)$ $\quad\left[\dfrac{7x}{x+1}\right]$

212 $\left(\dfrac{b}{b^3-1}+\dfrac{1}{b-1}\right)\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{b+1}\right)\left(\dfrac{b+1}{b}-\dfrac{1}{b+1}\right)$ $\quad\left[-\dfrac{1}{b^2}\right]$

213 $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{xy-2y^2}+\dfrac{2}{x-2y}\right)\cdot\dfrac{2y^2-xy}{x^2+y^2-2xy}\cdot\left(\dfrac{x}{y}-1\right)$ $\quad\left[\dfrac{x-2y}{xy}\right]$

214 $\left(\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\cdot\dfrac{x^3-4x}{x^4+5x^2+4}$ $\quad\left[\dfrac{2}{x}\right]$

215 $\left(\dfrac{3}{1-b^3-3b+3b^2}+\dfrac{2b-3}{b^2+1-2b}+\dfrac{2}{b-1}\right)\cdot\dfrac{4b^2-3b-1}{16b^2-1}$ $\quad\left[\dfrac{b-2}{(b-1)^2}\right]$

216 $\left(x-y-\dfrac{x^2+y^2}{x-y}\right)\left(\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x^2+1}{x^2-x}\right)\cdot\dfrac{y^2+x^2-2xy}{2-2x}$ $\quad[y(x-y)]$

217 $\left(\dfrac{a-1}{4a-4}-\dfrac{a-3}{4-4a}+\dfrac{a+1}{a^2-4a+3}\right)\left[-2\left(\dfrac{3}{a-4}+1\right)\right]$ $\quad\left[\dfrac{a^2-3a+8}{(a-3)(4-a)}\right]$

218 $\left(\dfrac{1}{b-y}+\dfrac{3}{b+y}-\dfrac{2by}{b^3-by^2}\right)\left(\dfrac{y}{b-y}-\dfrac{5by-y^2}{y^2-b^2}-\dfrac{6by}{b^2-y^2}\right)$ $\quad[0]$

219 $\left(-\dfrac{x^3-3b^2x}{x^3-b^3}+\dfrac{x}{x-b}\right)\left(\dfrac{b}{x}-1\right)\left(\dfrac{2b-1}{4b+x}-\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad\left[\dfrac{b(2+x)}{2(x^2+b^2+bx)}\right]$

220 $\left(\dfrac{x+3}{2x^2-3x-9}-\dfrac{2x-3}{x^2-6x+9}\right)\left(\dfrac{2x+3}{x^2+6x+9}-\dfrac{x-3}{2x^2+3x-9}\right)\cdot\dfrac{(9-4x^2)(x^2-9)}{(-3x)^2}$ $\quad\left[\dfrac{x^2}{x^2-9}\right]$

221 $\left(-\dfrac{y^3}{y+1}+y^2-y+1\right)\left(1+\dfrac{2y+1}{y^2}\right)\left\{\dfrac{2y}{1-y}-\left[\dfrac{y^2}{(y-1)^2}+\dfrac{y-3y^2+2y^3}{(1-y)^3}\right]\right\}$ $\left[\dfrac{y+1}{y(1-y)}\right]$

222 $\dfrac{4a^2}{4a^2-1}\cdot\left(2-\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1-6a}{1-2a}-\dfrac{12a^2-1}{4a^2-1}\right)\left(a^2+\dfrac{1+4a}{4}\right)$ $\left[\dfrac{4a^4}{2a-1}\right]$

223 $\left(-\dfrac{1}{x-2b}+\dfrac{x-9b}{2bx-4b^2}\right)\left(-\dfrac{2x^2-18bx+28b^2}{x+3b}\right)\left(\dfrac{x-b}{x-7b}-\dfrac{56b^2}{x^2-18bx+77b^2}\right)$ $\left[\dfrac{15b-x}{b}\right]$

224 $\left[\dfrac{x^3-y^3}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}-\dfrac{(x-y)(x+y)-xy}{x^2-2xy+y^2}\right]\left(\dfrac{x}{xy+y^2}-\dfrac{x+2y}{xy+x^2}-\dfrac{y-2x}{xy}\right)$ $\left[\dfrac{6(x+y)}{x(x-y)}\right]$

La potenza

Esegui i calcoli indicati nei seguenti esercizi, nei quali compaiono le potenze di frazioni algebriche.

225 $\left(-\dfrac{2ax^2}{y^3}\right)^2$; $\quad\left(\dfrac{5a^3b}{3x^2}\right)^{-1}$; $\quad\left[\dfrac{b^2(x^2-y^2)}{x+y}\right]^4$ $\left[\dfrac{4a^2x^4}{y^6};\ \dfrac{3x^2}{5a^3b};\ b^8(x-y)^4\right]$

226 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\left(\frac{2x^2-2x}{x+2}\right)^3\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}\right)^{-2}$$

Scomponiamo i polinomi delle due frazioni e trasformiamo la seconda potenza in modo che abbia esponente positivo:

$$\left[\frac{2x(x-1)}{x+2}\right]^3\cdot\left(\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x+2)\cancel{(x+1)}}\right)^{-2}=\frac{8x^3(x-1)^3}{(x+2)^3}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$$

Eseguiamo anche la seconda potenza e completiamo il calcolo: $\dfrac{8x^3(x-1)^{\cancel{3}}}{(x+2)^{\cancel{3}}}\cdot\dfrac{\cancel{(x+2)^2}}{\cancel{(x-1)^2}}=\dfrac{8x^3(x-1)}{x+2}$

227 $\left(\dfrac{a^2b-ab^2}{a+b}\right)^2\cdot\left(\dfrac{ab-b^2}{a+b}\right)^{-3}$; $\quad\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^2\left(\dfrac{x^2-9}{x+3}\right)^2$ $\left[\dfrac{a^2(a+b)}{b(a-b)};\ \dfrac{1}{(x+3)^2}\right]$

228 $\left(\dfrac{5x+10}{x-2}\right)^3\left(\dfrac{15x+30}{3x-6}\right)^4$; $\quad\left(\dfrac{x-3y}{x+y}\right)^3\left(\dfrac{x^2-9y^2}{x^2+4xy+3y^2}\right)^2$ $\left[\dfrac{5^7(x+2)^7}{(x-2)^7};\ \dfrac{(x-3y)^5}{(x+y)^5}\right]$

229 $\dfrac{4y^4}{4y^2-1}\cdot\left(\dfrac{3y-1}{y}\right)^2\left(4-\dfrac{1}{y^2}\right)$; $\quad\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)^{-2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\left[\dfrac{(x-1)^2}{x^4-1}\right]^{-1}$ $\left[4(3y-1)^2;\ \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2\right]$

230 $\dfrac{(2x-a)^2-1}{(2x-a+1)^3}\cdot\left(\dfrac{4x-2a+2}{3}\right)^2$; $\quad\left(2-\dfrac{a^2+3a}{a^2+6a+9}\right)\cdot\dfrac{a+3}{a^2-36}$ $\left[\dfrac{4}{9}(2x-a-1);\ \dfrac{1}{a-6}\right]$

231 $\left(\dfrac{3+3a}{a}\right)^3\left(\dfrac{7a^3}{-3a^3-3a^4}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{a+1}\right)$ $\left[\dfrac{147}{a^2}\right]$

232 $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ $\left[\dfrac{4(x^2-y^2)}{x^3y^3}\right]$

233 $\left(\dfrac{a+b}{a-2b}-1\right)^2\left(a-\dfrac{4b^2}{a}\right)^2\left(\dfrac{a-2b}{a+2b}+1\right)^2$ $[36b^2]$

234 $\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2a^2}\right)\left(\dfrac{1}{a^2+a+1}-\dfrac{1}{a^2+2a}\right)$ $\left[\dfrac{1}{2a(a+2)}\right]$

235 $\left(\dfrac{y^2-2y+4}{y^3}-\dfrac{1}{y+2}\right)^3\left(\dfrac{14-9y}{4-y^2}+\dfrac{1}{2-y}\right)^2$ $\left[\dfrac{1}{y^9}\left(\dfrac{8}{2+y}\right)^5\right]$

236 $\left(\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{2-x}\right)^2\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^3\left(\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{8}{x+2}\right)^2$ $\left[\dfrac{x-3}{x^2(x-2)}\right]$

237 $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(x-\dfrac{x}{x+1}\right)^3\cdot x^{-4}$ $\left[\dfrac{x^2}{x+1}\right]$

La divisione

Esegui le seguenti divisioni fra frazioni algebriche e calcola il valore delle espressioni.

238 **ESERCIZIO GUIDA**

$\dfrac{2ab}{x}:\dfrac{a^2}{3x}$

Trasformiamo la divisione in una moltiplicazione e semplifichiamo $\dfrac{2\cancel{a}b}{\cancel{x}}\cdot\dfrac{3\cancel{x}}{a^{\cancel{2}}}=\dfrac{6b}{a}$

239 $\dfrac{x^3y^2}{2x}:\dfrac{xy^3}{4x^2}$; $-\dfrac{1}{3}x^5y^3:\dfrac{x^4y^4}{9}$ $\left[\dfrac{2x^3}{y};\ -\dfrac{3x}{y}\right]$

240 $\dfrac{2a^2b^3}{4c^2}:\dfrac{(3ab)^2}{16c}$; $\dfrac{14a^6x}{9y^5}:\left(-\dfrac{7a^3x}{18y^6}\right)$ $\left[\dfrac{8b}{9c};\ -4a^3y\right]$

241 $-\dfrac{32x^5y^3}{25z^2}:\left(-\dfrac{64x^3y^3}{15z^4}\right)$; $1:\left(-\dfrac{3ab}{x^3}\right)^2$ $\left[\dfrac{3}{10}z^2x^2;\ \dfrac{x^6}{9a^2b^2}\right]$

242 $\dfrac{4y}{x+y}:\dfrac{3y^2}{2x+2y}$; $\dfrac{a-2b}{9b^2}:\dfrac{6b-3a}{27b}$ $\left[\dfrac{8}{3y};\ -\dfrac{1}{b}\right]$

243 $\dfrac{7ab}{a+b}:\dfrac{21a}{3a+3b}$; $-\dfrac{5x^2}{x+2y}:\dfrac{3x}{3x+6y}$ $[b;\ -5x]$

244 $\dfrac{3a+3b}{a-2}:\dfrac{6}{2a-4}$; $\dfrac{-2x+2y}{x+1}:\dfrac{10}{-5x-5}$ $[a+b;\ x-y]$

245 $\dfrac{x^2+5}{3xy}:\dfrac{2x^2+10}{x}$; $\dfrac{a+b}{3}:\dfrac{a^2+2ab+b^2}{9a}$ $\left[\dfrac{1}{6y};\ \dfrac{3a}{a+b}\right]$

246 $\dfrac{x^2-16}{2xy}:\dfrac{2x+8}{8y}$; $\dfrac{3x+3-ax-a}{a-3}:\dfrac{x+1}{2}$ $\left[\dfrac{2(x-4)}{x};\ -2\right]$

247 $\dfrac{x^2+6x+9}{3x-3}:\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$; $\dfrac{a^2-a-2}{a^2-1}:\dfrac{6-3a}{12}$ $\left[\dfrac{x+3}{3};\ \dfrac{4}{1-a}\right]$

248 $\dfrac{a^3-8}{a^2b}:(a^2+2a+4)$; $\dfrac{2bx-b+2ax-a}{2x+1}:\dfrac{12x-6}{6x+3}$ $\left[\dfrac{a-2}{a^2b};\ \dfrac{b+a}{2}\right]$

249 $\dfrac{8x^3-1}{7x-3-2x^2}:\dfrac{(2x+1)^2-2x}{9-x^2}$; $\dfrac{7a^3-56b^3}{14}:(a^2+2ab+4b^2)$ $\left[x+3;\ \dfrac{a-2b}{2}\right]$

250 $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}:\dfrac{3x(x-2)+12}{x^3+8}$; $\dfrac{a^2-4}{a^2+4}:\dfrac{a+2}{a^3+4a}$ $\left[\dfrac{x-3}{3};\ a(a-2)\right]$

251 $\dfrac{(3y-a)2x^2-9yz^2+3az^2}{4x^2-6z^2}:\dfrac{9y^2+a^2-6ay}{8}$ $\left[\dfrac{4}{3y-a}\right]$

252 $\dfrac{a^3b^3+3a^3-3b^3-9}{4a^5-2a^3} : \dfrac{2a^2b^3+6a^2-b^3-3}{4a^4+1-4a^2}$ $\left[\dfrac{a^3-3}{2a^3}\right]$

253 $\dfrac{27-a^3-27a+9a^2}{a^3-a^2-9a+9} : \dfrac{3a^2-18a+27}{a^2+2a-3}$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

254 $\dfrac{-16x^2-36y^2-48xy}{2x^2+3xy-2x-3y} : \dfrac{2x^2+3xy+2x+3y}{x^2-1}$ $[-4]$

255 $\dfrac{12a^2x^2-8a^3-6ax^4+x^6}{x^4+4ax^2+4a^2} : \dfrac{3x^4+12a^2-12ax^2}{x^6+8a^3}$ $\left[\dfrac{(x^2-2a)(x^4-2ax^2+4a^2)}{3(x^2+2a)}\right]$

256 $\dfrac{4a^2-9y^2-6b^2y-b^4}{8a+12y+4b^2} : \dfrac{4a^2+9y^2+b^4-12ay-4ab^2+6b^2y}{16a^2}$ $\left[\dfrac{4a^2}{2a-3y-b^2}\right]$

257 $\dfrac{81a^4-16b^4}{9a^3+4ab^2-9a^2b-4b^3} : \dfrac{9a^2+4b^2+12ab}{3a^2-ab-2b^2}$ $[3a-2b]$

258 $\dfrac{a^5-6a^4b+12a^3b^2-8a^2b^3}{a^2-3ab+2b^2} : \dfrac{a^2-ab-2b^2}{3a^2-3b^2}$ $[3a^2(a-2b)]$

259 $\dfrac{4x^2+4xy-9+y^2}{a^3+3a^2b^2+3ab^4+b^6} : \dfrac{4x^2+y^2+9+4xy-12x-6y}{(-a-b^2)\cdot(a^2+b^4+2ab^2)}$ $\left[\dfrac{-(2x+y+3)}{2x+y-3}\right]$

260 **ESERCIZIO GUIDA**

Attenzione all'ordine con cui vengono eseguite le operazioni.

Osserva il seguente esercizio: $\dfrac{x^3-1}{2x^2+2} : \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} : \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{4(x^4-1)}$

Poiché non ci sono parentesi che privilegiano alcune operazioni, esse vanno eseguite nell'ordine in cui si presentano

$$= \left[\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+x+1)}{2(x^2+1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}\right] : \frac{(x-1)^3}{4(x^2-1)\cdot(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(x^2+x+1)\cdot\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{2}\ \cancel{(x^2+1)}\cdot\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\ \cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{(x-1)^3}} = 2(x^2+x+1)$$

Avremmo ottenuto un risultato diverso se avessimo considerato prioritaria la seconda divisione. In questo caso infatti è come se l'espressione fosse scritta nel seguente modo

$$\frac{x^3-1}{2x^2+2} : \left[\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} : \frac{x^3-3x^2+3x-1}{4(x^4-1)}\right]$$

Svolgendo la divisione nella parentesi quadra avremmo trovato

$$= \frac{x^3-1}{2(x^2+1)} : \left[\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-1)^2}}\cdot\frac{4\ \cancel{(x-1)}\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)}{(x-1)^3}\right] =$$

$$= \frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{2(x^2+1)}\cdot\frac{(x-1)^3}{4(x+1)^2\cdot(x^2+1)} = \frac{(x-1)^4\cdot(x^2+x+1)}{8(x+1)^2\cdot(x^2+1)^2}$$

I risultati ottenuti sono ovviamente diversi.

261 $\dfrac{3y}{2y+5} : \dfrac{6y^3}{4y+10} : \dfrac{4}{y^3-5y^2}$; $\quad \dfrac{3y}{2y+5} : \left(\dfrac{6y^3}{4y+10} : \dfrac{4}{y^3-5y^2}\right)$ $\quad \left[\dfrac{y-5}{4};\ \dfrac{4}{y^4(y-5)}\right]$

262 $\left(\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-8x+16} : \dfrac{2x^2+4x+2}{3x-12}\right) \cdot \left(\dfrac{x^2-x-2}{4x+x^2+3} : \dfrac{18x}{6x+18}\right)$ $\quad \left[\dfrac{x-2}{2x^2+2x}\right]$

263 $\dfrac{a-2b}{a+2b} : \dfrac{a}{a^2-4b^2} \cdot \dfrac{a-2b}{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3}$ $\quad \left[\dfrac{1}{a}\right]$

264 $\dfrac{4y^2-81}{3a-3b} : \left(\dfrac{4y^2+81-36y}{24} \cdot \dfrac{8y+36}{a^2-b^2}\right)$ $\quad \left[\dfrac{2(a+b)}{2y-9}\right]$

265 $\left(\dfrac{2ax+2ay-4x-4y}{4a^2-16} : \dfrac{x^2-y^2}{2a+4}\right) : \left(\dfrac{x+y+1}{x-2y} \cdot \dfrac{2x^2-6xy+4y^2}{1+2y+y^2-x^2}\right)$ $\quad \left[\dfrac{y-x+1}{2(x-y)^2}\right]$

266 $\dfrac{3x^2y}{2a^3+a^2y} \cdot \left(\dfrac{2a^2+ay}{x^3y} : \dfrac{3a+3y}{a^2x-axy}\right)$ $\quad \left[\dfrac{a-y}{a+y}\right]$

267 $\dfrac{3x+9}{x^2+2x-3} : \dfrac{x^2-9x+8}{x^2+1-2x} : \left(\dfrac{3x+6}{x-8}\right)^2$ $\quad \left[\dfrac{x-8}{3(x+2)^2}\right]$

268 $\dfrac{9y^2-81}{4y^3-196y} : \dfrac{3y+9}{2y^2-14y} : \left(-\dfrac{3y-9}{2y+14}\right)$ $\quad [-1]$

269 $\dfrac{7a+7x}{3a-3x} : \dfrac{14a+14x}{9x^2-9a^2}\left(\dfrac{3a^2-9a+3ax-9x}{a^2-4a+3}\right)^{-1}$ $\quad \left[\dfrac{1-a}{2}\right]$

270 $\dfrac{y^3+9y-6y^2}{y^3-27} : \left(\dfrac{xy-3x+y-3}{xy-2x+y-2} : \dfrac{xy^2+3xy+9x+y^2+3y+9}{y^3-4y^2+4y}\right)$ $\quad \left[\dfrac{x+1}{y-2}\right]$

271 $\dfrac{xy-4y-2x+8}{xy-3y-2x+6} \cdot \dfrac{4-y^2}{x^2-7x+12} : \dfrac{xy+2x}{x^2-6x+9}$ $\quad \left[\dfrac{2-y}{x}\right]$

272 $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) : \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right) \cdot \dfrac{x^2-y^2}{(x+1)^2-(y-1)^2}$ $\quad \left[\dfrac{x+y}{y-x-2}\right]$

273 $\left(x-\dfrac{x-4}{x-3}\right) : \left[(2-x)^2 : \left(1-\dfrac{3}{x}\right)\right]$ $\quad \left[\dfrac{1}{x}\right]$

274 $\left(\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{a-1}\right) : \left(\dfrac{1}{a^2-2a+1}-\dfrac{3}{a-1}+a\right) : \left(\dfrac{a^4-2a^2}{a^2-3a+2}\right)^{-1}$ $\quad \left[\dfrac{a}{a-2}\right]$

275 $\left(\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{1-a}{a+1}\right) : \left(\dfrac{a}{1-a} : \dfrac{a^2+3a+2}{20a^2}\right)$ $\quad \left[-\dfrac{a+2}{5a^2}\right]$

276 $\left(2a-b-\dfrac{4a^2+b^2}{2a+b}\right)\left\{\left(-\dfrac{4}{2a+b}+\dfrac{4a^2+b^2-2ab}{2a^3}\right) : \left[\dfrac{b^2}{2a}\left(1-\dfrac{2a}{2a+b}\right)\right]\right\}$ $\quad \left[-\dfrac{2b^2}{a^2(2a+b)}\right]$

277 $\left\{\left(\dfrac{x-y}{y^2}-\dfrac{3}{x+y}\right) : \left[-\dfrac{2(1+2y)}{x+1}+\dfrac{x}{y}\right]\right\}\left(1+\dfrac{1}{x+2y}\right)$ $\quad \left[\dfrac{x+1}{y(x+y)}\right]$

278 $\left[\dfrac{a-3}{a^2+3a+2} : \left(\dfrac{2}{a+2}-\dfrac{3}{a+1}\right)\right] : \left[\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{a+1}\right)\left(\dfrac{3a+1}{a^2-2a-3}\right)^{-1}\right]$ $\quad \left[-\dfrac{2a}{a+4}\right]$

 la teoria è a pag. 10

Semplifica le seguenti espressioni di riepilogo sulle frazioni algebriche.

279 $\frac{1}{x-3}\left(x+\frac{1}{x-3}\right)-\frac{1}{x-2}\left(x-\frac{1}{2-x}\right)-\frac{x^2(x-6)+13x-11}{(x^2-5x+6)^2}$ $\left[\frac{1}{x^2-5x+6}\right]$

280 $\left\{\left[-\left(\frac{x}{y^2-x^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\right):\frac{2x}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}-\frac{x^2}{x+y}\right]-\frac{y^2}{x+y}\right\}:\frac{x^2}{x+y}$ $[-1]$

281 $\left[\left(\frac{3ab}{ab+2}-\frac{3ab}{ab-2}\right)\frac{a^2b^2-4}{9ab}+\frac{a^2+5a+6}{a^2+2a-3}\right]:\frac{10-a}{3a^2-6a+3}$ $[a-1]$

282 $\frac{2}{3}b+\frac{a^6-b^6}{3a-3b}:\frac{a^4-b^4}{2a^2+2b^2}\cdot\frac{(b-a)^2}{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}$ $\left[\frac{2}{3}a\right]$

283 $\left[\left(\frac{ab+5}{ab+1}-1\right):(ab)-\left(\frac{1}{ab-1}-\frac{1}{ab}\right)-\frac{2}{1-a^2b^2}\right]\left(\frac{10}{ab}\right)^{-1}$ $\left[\frac{1}{2(ab+1)}\right]$

284 $\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{a^2b}\right)\cdot\frac{a^2b^2-a^2b+ab^2}{a^2b^2-a^2-b^2+2ab}-\frac{1}{b}$ $\left[\frac{1-a}{ab}\right]$

285 $\left(\frac{6a}{8a^3+1}+\frac{1}{2a+1}\right):\frac{a-2}{4a^2+1-2a}-\frac{4a-3}{a^2-3a+2}$ $\left[\frac{2a-1}{a-1}\right]$

286 $\left\{\left[\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}:\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}\right]\cdot\frac{1}{x^2+y^2+2xy}\right\}^3$ $[1]$

287 $\left(\frac{1}{3xy-2y-3x+2}+\frac{1}{3xy+2y-3x-2}\right):\frac{6x}{9x^2-4}-\frac{2}{y^2-1}$ $\left[\frac{1}{y+1}\right]$

288 $\frac{x+3}{7x-7x^2+42}:\left(\frac{x-3}{x+3}:\frac{x^2-6x+9}{x^2+6x+9}\right)$ $\left[-\frac{1}{7(x+2)}\right]$

289 $\left(-\frac{6}{y}+1+\frac{9}{y^2}\right)\left(\frac{1}{y^2-4y+3}+\frac{1}{y-3}\right)^2$ $\left[\frac{1}{(y-1)^2}\right]$

290 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-1\right)$ $\left[-\frac{4b^2}{a^2-b^2}\right]$

291 $\left(\frac{y}{x^2+xy}-\frac{x}{xy+y^2}\right):\left(\frac{x}{xy-y^2}-\frac{x+y}{xy}\right)^{-1}$ $\left[-\frac{1}{x^2}\right]$

292 $\left(\frac{a+2}{2a}+\frac{1-3a}{a^2}\right)\cdot\frac{4a^2}{a^2-4a+2}+\frac{1}{a-1}$ $\left[\frac{2a-1}{a-1}\right]$

293 $\left(\frac{1-3ab}{3a^2+ab}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{b}{3a-b}-\frac{1-9a^2}{-9a^2+b^2}+\frac{3a}{3a+b}\right)$ $\left[\frac{3a-b}{a}\right]$

294 $x\left(1+\frac{y+2}{y-2}\right)+a\left(1-\frac{y+2}{2-y}\right)$ $\left[\frac{2y(a+x)}{y-2}\right]$

295 $\left(3x-1+\frac{x^2-2x}{3x^2-7x+2}+\frac{x-x^3}{x-3x^2}\right)\cdot\frac{3x-1}{1-4x+4x^2}$ $\left[\frac{5x}{2x-1}\right]$

296 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right):\left(a-b+\frac{a^2+3b^2}{a+b}\right)$ $\left[\frac{1}{a-b}\right]$

297 $\left(\frac{x+2y}{x-2y}+\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{2x^2+1+4y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{4y^2+1+4y}{3x^2-12y^2}$ $\left[\frac{3(2y-1)}{2y+1}\right]$

298 $\left(\frac{x}{x-y}+\frac{6xy}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{x}{2x+2y}-\frac{2x}{3x-3y}\right)-1$ $[-7]$

299 $\frac{2(9a^2+6a+1)}{9a^2-9}:\frac{3a+1}{3-3a}\cdot\frac{a^2+4a+3}{3a+1}+a+2$ $\left[\frac{1}{3}a\right]$

300 $\left[\frac{2(4x-3x^2-1)}{1-6x+9x^2}+\frac{3x-2}{3x-1}\right]:\frac{x^2}{9x^2-1}\cdot\left[x\cdot\left(\frac{1}{3x+1}-\frac{3x}{9x^2+6x+1}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{3x+1}\right]$

301 $\left[\left(\frac{x-2}{2-5x}+\frac{3x+1}{x}+\frac{2x^2-x-2}{5x^2-2x}\right)\left(\frac{2-4x}{x}\right)^{-2}-\frac{x}{5x-2}\right]\cdot\frac{4x^2-1}{6x}$ $\left[\frac{2x+1}{3(5x-2)}\right]$

302 $\frac{x^3-3x^2}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2-3x}\cdot\frac{x+2}{x^2+x}+\left[\frac{2x+y}{x^2-xy}\cdot\left(\frac{3x}{2x+y}-1\right)\right]:\frac{1}{x}$ $[2]$

303 $\left(\frac{2x^3}{x^3+8}-\frac{4}{x+2}+\frac{4}{x}-2\right):\left[\frac{8a^2}{3a(x+2)^3}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right]$ $\left[\frac{3(x-2)^2}{ax}\right]$

304 $\frac{x^2-4}{x^2-1}:\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{y-2}{yx-y+x-1}-\frac{y+2}{yx-y-x+1}\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)$ $\left[\frac{6x}{1-x}\right]$

305 $\left\{\left[\frac{1}{a-b}+\frac{b^2}{(b-a)^3}-\frac{a-2b}{(a-b)^2}\right]\cdot\frac{(a-b)^3}{2b-a}+\frac{1}{b}\right\}:(1+b)$ $\left[\frac{1-b}{b}\right]$

306 $\left[\left(\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x+4}{x-1}-\frac{x-4}{x+1}\right)-\frac{20x^2(x+2)}{(1-x^2)^2}\right]\cdot\frac{x^2-1}{40x^2-80x}$ $\left[\frac{1}{1-x^2}\right]$

307 $\left(\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x-x^2}-\frac{2}{1-x^2}\right)\left(\frac{2x}{x^2+4x+4}\right)^{-1}$ $\left[\frac{x+2}{x^2}\right]$

308 $\left(\frac{8}{3x+3y}\cdot\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^2\left(\frac{2y}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x-y}+\frac{1}{2x+y}\right)$ $[0]$

309 $\left(\frac{y^2+y}{y-1}+y\right)(2y-3)-(y-2)\left(y-\frac{y^2+y}{1-y}\right)$ $[2y^2]$

310 $\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}\right):\frac{6x+18}{6x+6}\cdot\frac{x^2-x-2}{(x+1)^2}$ $\left[\frac{3}{(x-1)(x+3)}\right]$

311 $\left(\frac{7a-10}{a^2-3a+2}-\frac{3}{a-1}-\frac{4}{a-2}\right):\left(\frac{1}{a-b}:\frac{a}{a+b}\right)$ $[0]$

312 $\frac{x^2y^2}{x^4-y^4}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2}:\frac{y^2}{x-y}-\frac{x^2-y^2}{(x+y)^3}$ $\left[\frac{2y}{(x+y)^2}\right]$

313 $\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{a^2+1}{1-a^2}+\frac{a+1}{a-1}\right)^5\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)^{-4}$ $\left[\frac{a^2+1}{a^2-1}\right]$

314 $\left(\frac{7x^2+7}{x+1}\cdot\frac{x+1}{2x-2}:\frac{21x^2+21}{6x^2+6-12x}\right)^2:\left(\frac{1}{2x}-1+\frac{x}{2}\right)$ $[2x]$

315 $\left[\left(\dfrac{y+1}{y^2-4y+3}-\dfrac{y-3}{4y-4}+\dfrac{1}{4}\right):\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y-1}+\dfrac{1}{y-3}\right)-1\right]\cdot\dfrac{y^2-5}{y-4}$ $[-y-1]$

316 $\left(1-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)^3\left[\left(\dfrac{2a-b}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}\right):\dfrac{a^2b^2-ab^3+b^4}{a^2+2ab+b^2}\right]^3$ $\left[-\dfrac{1}{a^3(a-b)^3}\right]$

317 $\left(\dfrac{a^2-3a+1}{a-3}-1-\dfrac{1}{3-a}\right):\dfrac{a-5}{a-3}-\left(\dfrac{-3-2a}{a^2+3a+2}+\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{2}{a+1}\right):\dfrac{1}{a+1}$ $\left[\dfrac{a^2-5a+10}{a-5}\right]$

318 $\left(\dfrac{3y^2-2xy}{x^3-y^3}+\dfrac{x+3y}{x^2+xy+y^2}\right)\left(1-\dfrac{y^3}{x^3}\right)-\dfrac{1}{x+1}$ $\left[\dfrac{1}{x(x+1)}\right]$

319 $\left(\dfrac{3}{a^3-2a^2+a}+\dfrac{a-1}{a^3}+\dfrac{a+1}{a^2-a^3}\right)\left(1+\dfrac{a^3-2a^2-3a+1}{4a-1}\right)$ $\left[\dfrac{1}{a^2}\right]$

320 $\dfrac{2x-2y}{5}\cdot\dfrac{15x}{x^2-y^2}:\dfrac{3x}{(x+y)^2}+\left(\dfrac{2y^2}{x-y}-x-y\right)$ $\left[\dfrac{x^2+y^2}{x-y}\right]$

321 $\left(\dfrac{y-b}{y+b}+\dfrac{y+b}{b-y}+\dfrac{4by}{y^2-b^2}\right):\dfrac{2x-3y}{8x^3-27y^3-36x^2y+54xy^2}$ $[0]$

322 $\left(\dfrac{1}{m^2+2m}-\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{3m}\right)\left[\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4(m-2)}\right]\cdot\dfrac{4-m^2}{5-2m^2}$ $\left[-\dfrac{1}{12m}\right]$

323 $\left[\dfrac{x+1}{2x^2+2}-\dfrac{2x-1}{3x^2-3x+3}+\dfrac{1}{2(3x+3)}\right]\cdot\dfrac{x^5+x^3+x^2+1}{2x}$ $\left[\dfrac{1}{2x}\right]$

324 $\left[\dfrac{a^3}{a^3-b^3}:\dfrac{a^2}{a^2+b^2+ab}-\dfrac{a(a+1)}{(a^2-b^2)}\right]\cdot\dfrac{a^2-b^2}{b-1}$ $[a]$

325 $\dfrac{3a^3-4a^2}{a-1}:(4a-3a^2)+\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{1}{1-a}\right)\cdot\dfrac{a}{a+1}$ $[0]$

326 $\left[\left(\dfrac{a-1}{a^2-4}-\dfrac{1}{a+2}\right)^2:\left(\dfrac{a^2}{a^2-4}-1\right)^2\right]^2:4^{-2}$ $\left[\dfrac{1}{16}\right]$

327 $\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}:\left[\left(\dfrac{a^2-ab+b^2}{y^3-27}:\dfrac{a^3+b^3}{y^2+9+3y}\right):\dfrac{1}{y-3}\right]$ $\left[\dfrac{1}{a+b}\right]$

328 $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}+\dfrac{ax+ay+x+y}{a^2-a-2}\cdot\dfrac{a^2-3a+2}{3a^2-3}:\dfrac{x+y}{3a+3}$ $\left[\dfrac{2x+3}{x+2}\right]$

329 $\left[\dfrac{a-1}{4a^3-a}+\dfrac{a^2+a}{(2a^2-a)(2a+1)}+\dfrac{5a-9}{2a(2a+1)}\right]:\dfrac{12a-7}{4a^2-1}$ $\left[\dfrac{a-1}{2a}\right]$

330 $\dfrac{10y^2+3y-1}{2y+1}:\dfrac{5y-1}{2y-1}\cdot\dfrac{2y+1}{2y-1}$ $[2y+1]$

331 $\dfrac{x^2+x-2}{y-xy}:\dfrac{5x^2+x^3-x-5}{y+x^2y-2xy}\cdot\dfrac{x^2-25-25x+x^3}{x^2-6x+5}\cdot\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x+y}\right)^{-1}$ $\left[-\dfrac{x+y}{x+1}\right]$

332 $\dfrac{a^6-1}{a^2+2}:\dfrac{a^6+2a^3+1}{a^3-a^2+2a-2}\cdot\dfrac{a^2-a+1}{a^2+a+1}-\dfrac{a^2+1}{a+1}$ $\left[-\dfrac{2a}{a+1}\right]$

333 $\left(m-\frac{8+m}{m^2+1}\right)\left(-1+\frac{2n+m^2}{m^2+2m+4}\right):\frac{m^2-4-mn+2n}{1+m^2}$ $[-2]$

334 $\left(x+\frac{x}{x-1}-\frac{4}{x+1}-\frac{2x^3-x^2-5x+6}{x^2-1}\right):\frac{x-2}{3}$ $[-3]$

335 $\left(\frac{-a^3+b^3}{a^3+b^3}+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)^2-\frac{4a^4b^4}{(a^3+b^3)^2(a-b)^2}$ $[0]$

336 $\left[\left(\frac{1}{a^2+9-b^2+6a}-\frac{1}{a^2+9+b^2+6a-2ab-6b}\right):\frac{-6b}{3a+9+3b}\right]^{-1}$ $[(a+3-b)^2]$

337 $\frac{3xy}{x^2+x-3xy-3y}\cdot\left(\frac{x+1}{3y}+\frac{x+1}{x}\right):\left(\frac{x^2+xy-30y^2}{x^2+2xy-24y^2}:\frac{x^2-8xy+15y^2}{x^2-xy-12y^2}\right)$ $[1]$

338 $\left[(y^2-5y-14)^{-1}:\left(\frac{y^2}{16-y^4}-\frac{1}{y^2+4}-\frac{2}{4-y^2}\right)\right]\cdot\frac{4y-28}{y^2+4}$ $\left[\frac{y-2}{3}\right]$

339 $\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right):\frac{a^3+b^3}{a^3b+2a^2b^2+ab^3}\right]\left[\left(\frac{a-b}{b}+\frac{a^2b+a^3}{b^3-a^2b}+\frac{2a}{a-b}\right):\frac{b^2}{b^2-a^2}\right]^{-1}$ $[-b]$

340 $\left[\frac{ab+b^2}{b^2-ab}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{(b-a)^2}+\frac{b^2}{a^2-2ab+b^2}\right]+\frac{a^3-b^3}{b}:\frac{b-a}{b^2}$ $[-b(a^2+ab+b^2)]$

341 $\left[\frac{8x^3-y^3}{6x+3y}\cdot\left(\frac{4}{2x-y}-\frac{1}{x}\right)-x\right]^{-1}:\frac{1}{x^2+2xy+y^2}$ $[3x]$

342 $\left[\left(2x-\frac{a^2+4x^2}{a+2x}\right)\left(\frac{a}{2x}+1\right):\left(1-\frac{2x}{a+2x}\right)-\left(\frac{a}{2x}+2x\right)\left(\frac{4x^2}{a+4x^2}\right)\right]^{-2}$ $\left[\frac{4x^2}{a^4}\right]$

343 $\left(\frac{3}{x^6-x^3}-\frac{1}{9x^3-9}\right):\frac{9+x^2+3x}{3x^5+3x^3+3x^4}+\frac{6x-5}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{12}{x^2+x-2}$ $\left[\frac{14x+3}{3(x-1)}\right]$

344 $\frac{(y+2)^2-2y}{2y^2+8}\cdot\left(\frac{2y^3}{y^3-8}-\frac{2y}{y-2}+\frac{8}{y^2+2y+4}\right)+\frac{3}{2}+\frac{1}{y-2}$ $\left[\frac{3y-8}{2(y-2)}\right]$

345 $(2a-2b)\left(a-b-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)-(a-3b)\left[-(b-a)-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right]$ $[-2b^2]$

346 $\left[\frac{x-y-1}{1-x^2+2xy-y^2}:\left(\frac{1}{xy^3}-\frac{1}{x^3y}\right)\right]:\left[\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right):\frac{x^4-y^4}{x^3y^3}\right]$ $\left[\frac{y^2-x^2}{x-y+1}\right]$

347 $\left[\left(\frac{3a+b}{a^2-b^2}-\frac{3}{a-b}\right):\left(1-\frac{a}{a-b}\right)\right]^2:\left(\frac{2b}{a-b}-\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right)^2$ $\left[\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}\right]$

Trasforma le seguenti espressioni in modo che compaiano solo frazioni algebriche semplici e poi semplificale.

348 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{4+\frac{1}{x^2-3}}{\frac{x^2(4x^2-11)}{x^2-3}}$$

La linea di frazione principale è quella più marcata; ricordando che una linea di frazione corrisponde a una divisione, puoi riscrivere l'espressione in questo modo:

$\left(4+\frac{1}{x^2-3}\right):\frac{x^2(4x^2-11)}{x^2-3}$ Continua adesso nel modo solito. $\left[\frac{1}{x^2}\right]$

349 $\dfrac{\dfrac{3xy^2-6y^3}{5x^3-5xy^2}}{\dfrac{6y^2-3xy}{x+y}}$; $\dfrac{\dfrac{2x-8}{x^2-16}}{\dfrac{x^2+3x}{x^2+7x+12}}$ $\left[\frac{y}{5x(y-x)};\ \frac{2}{x}\right]$

350 $\dfrac{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{3x-3y}}{\dfrac{x^2-x+yx-y}{2x^2-2xy-2x+2y}}$; $\dfrac{2-\dfrac{a+3b}{a-3b}-\dfrac{a-3b}{a+3b}}{\dfrac{1}{9b^2-a^2}}$ $\left[\frac{2(x+y)}{3};\ 36b^2\right]$

351 $\dfrac{\dfrac{16+x^2+8x}{5+x}-x}{\dfrac{16+3x}{15+3x}}$; $\dfrac{\left[x-\dfrac{x-2}{x}\cdot(x+1)\right]\dfrac{1}{x}}{\dfrac{(x^2-1)(2-x)}{x^2}+x}$ $\left[3;\ \frac{x+2}{2x^2+x-2}\right]$

352 $\dfrac{\dfrac{a^2-2a+ab-2b}{6a-2}}{(2a-4)\cdot\dfrac{a+b}{9a^2-1}}$; $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2x+y}-\dfrac{2}{2x-y}\right):\dfrac{6x-15y}{4x^2-y^2}}{3x+3y}$ $\left[\frac{3a+1}{4};\ \frac{1}{9(x+y)}\right]$

353 $\dfrac{\dfrac{5y}{3x+y}+\dfrac{y}{3x-y}}{\dfrac{5y}{3x-y}-\dfrac{y}{3x+y}}$; $\dfrac{\dfrac{9+y^2+6y}{1+\dfrac{3}{y}}-y}{\dfrac{y}{y+3}-y}$ $\left[\frac{9x-2y}{6x+3y};\ -(y+3)\right]$

354 $\dfrac{\dfrac{a}{a^2-1}-\dfrac{a}{a^2+1}}{\dfrac{2}{a^3-a^2+a-1}}$; $\dfrac{\dfrac{a}{2a-b}-1+\dfrac{b}{2a+b}}{\dfrac{2a-3b}{4a^2+b^2+4ab}}$ $\left[\frac{a}{a+1};\ \frac{a(2a+b)}{b-2a}\right]$

355 $\dfrac{\dfrac{y+3}{y^2-y-2}-\dfrac{y-1}{y^2+2y+1}}{\dfrac{7y+1}{y^2-y-2}}$; $\dfrac{\dfrac{a^2-8a+16}{4-a^2}\cdot\dfrac{a^2-7a+10}{a^2-a-12}}{\dfrac{a^2-9a+20}{a^2+5a+6}}+\dfrac{a+2}{a-1}$ $\left[\frac{1}{y+1};\ \frac{3}{a-1}\right]$

ESERCIZI DI SINTESI E APPROFONDIMENTO

356 Dopo aver semplificato le due espressioni algebriche $\dfrac{x(a-2)}{(a+1)(b-2)}-\dfrac{1}{ab-2a+b-2}$ e $\dfrac{1}{b-2}+\dfrac{x}{a+1}$, verifica che esse sono uguali se $x=\dfrac{a+2}{a-b}$ e determina il loro comune valore. $\left[\frac{a^2-a+b-4}{(a+1)(a-b)(b-2)}\right]$

357 Data la frazione algebrica $\dfrac{x^2-3x+5}{kx^2-2kx+1}$ con $k \in R$, determina sotto quali condizioni si verifica che:

a. il valore $x=1$ non appartiene al dominio della frazione; $[1-k=0]$

b. il valore $x=0$ appartiene al dominio della frazione; $[\forall k]$

c. il valore $x=-2$ appartiene al dominio della frazione. $[8k+1 \neq 0]$

358 Considerata la frazione algebrica $\dfrac{4x^3+2x^2+kx-2k}{ax+2}$ con $a, k \in R$, determina sotto quali condizioni si verifica che:

a. il valore $x=-1$ non appartiene al dominio della funzione; $[2-a=0]$

b. per $a=1$, la frazione diventa un polinomio. $[-4k-24=0]$

359 Per quale valore del parametro k la frazione $\dfrac{x^2-4x+3+kx-k}{x^2+3x+2}$ una volta semplificata, si riduce a:

a. $\dfrac{x-1}{x+1}$ **b.** $\dfrac{x-1}{x+2}$ [**a**. $k=5$; **b**. $k=4$]

360 Se $a+\dfrac{1}{a}=2$, quanto vale $a^3+\dfrac{1}{a^3}$?

(Suggerimento: pensa allo sviluppo del cubo del binomio) $[2]$

361 Sia P un polinomio; quale valore assume la frazione $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{P}}}$ nei seguenti casi?

a. $P=a-b$ $[a-b+2]$

b. $P=x^2-2$ $[x^2]$

c. $P=\dfrac{1-x}{x}$ $\left[\dfrac{x+1}{x}\right]$

Qualunque sia l'espressione di P, quanto vale la frazione? $[P+2]$

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **a.** **2** **c** **3** **a.** $x \neq -1$, $x=2$; **b.** $x=-1$, $x \in R$; **c.**-3, non è definita

4 **a.** F, **b.** V, **c.** F, **d.** V **5** **a.**, **c.**, **d.** **6** **d.** **7** **c.**

39 **c.** **40** **c.** **41** **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** V, **e.** V **42** **a.** ①, **b.** ①, **c.** ③

43 **a.** ③, **b.** ④, **c.** ①, **d.** ② **103** **a.** **104** **a.** ③, **b.** ④ **105** **d.**

184 **c.** **186** **d.** **187** **d.** **188** **a.** F, **b.** F, **c.** V

189 **d.** **190** **a.** $\neq$, **b.** $\neq$, **c.** $=$, **d.** $=$

Sul sito www.edatlas.it *trovi...*

- esercizi tratti dalle gare di matematica
- i problemi di Matematica e realtà
- l'attività di recupero
- la rubrica Math in English con alcuni esercizi in lingua inglese

Test finale

1 Dopo aver scomposto i denominatori delle seguenti frazioni, scrivi le C.d.E. di ciascuna di esse:

a. $-\dfrac{7}{8x}$ **b.** $\dfrac{2x}{x^2-25}$ **c.** $\dfrac{b+1}{2b^3+2b+4b^2}$ **d.** $\dfrac{m-4}{m^2+m}$

0,25 punti per ogni esercizio

2 Stabilisci se le seguenti coppie di frazioni sono equivalenti determinando anche il loro insieme di definizione:

a. $\dfrac{2x-3y}{x-5y}$ $\dfrac{2x^2-xy-3y^2}{5y^2+4xy-x^2}$ **b.** $\dfrac{4x-6y}{2x+10y}$ $\dfrac{3y-2x+2xy-3y^2}{xy-5y-x+5y^2}$

0,5 punti per ogni esercizio

3 Semplifica, se possibile, le seguenti frazioni:

a. $\dfrac{2a^3-a^2-18a+9}{a^2-9}$ **b.** $\dfrac{8a+3a^2-3}{9a-27a^2+27a^3-1}$

c. $\dfrac{x^4-16}{x^4-x^3+2x^2-4x-8}$ **d.** $\dfrac{a^4-2a^2-3}{a^3-3a+9-3a^2}$

0,5 punti per ogni esercizio

4 Semplifica le seguenti espressioni:

a. $a-\left(2a-\dfrac{3-4a}{a-2}\right)+\dfrac{a^2+1}{a+2}$ 0,5 punti

b. $\dfrac{2x^2-3x+1}{5-5x}:\left(\dfrac{3x^2+6x+3}{9x^2-9}:\dfrac{5}{1-2x}\right)$ 0,5 punti

c. $\left(\dfrac{9y^2-7y}{y+1}+1\right)\left[\left(\dfrac{1}{y}+1\right):\left(\dfrac{9y^2-1}{3y}\right)^2\right]-\dfrac{5y}{9y^2+6y+1}$ 1 punto

d. $\left[\dfrac{a^2-1}{5ab}\cdot(a-2)\right]:\left[(2-a)\cdot\dfrac{a^2b+ab}{a^2b}\right]$ 1 punto

e. $\left\{\left[\left(1+\dfrac{x^2+1}{2x}\right):\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{-1}\right]\cdot\left(-\dfrac{4(1+x^2)}{1-x^2}\right)-3\right\}^{-1}$ 1,5 punti

f. $\left\{\left[\left(\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{5x-4}{x^2-3x+2}\right):\dfrac{2x-3}{x^2-5x+6}\right]:(x^2-2x-3)-\dfrac{x}{3-2x}\right\}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$

1,5 punti

Soluzioni

1 **a.** $x \neq 0$; **b.** $x+5 \neq 0 \ \wedge \ x-5 \neq 0$; **c.** $b+1 \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0$; **d.** $m \neq 0 \ \vee \ m+1 \neq 0$

2 **a.** non sono equivalenti; **b.** sono equivalenti per $x+5y \neq 0 \ \wedge \ y \neq 1$

3 **a.** $2a-1$; **b.** $\frac{a+3}{(3a-1)^2}$; **c.** $\frac{x+2}{x+1}$; **d.** $\frac{a^2+1}{a-3}$

4 **a.** $\frac{2(3a^2-2)}{4-a^2}$; **b.** $\frac{3(x-1)}{x+1}$; **c.** $\frac{4y}{(3y+1)^2}$; **d.** $\frac{1-a}{5b}$; **e.** $\frac{1-x}{x-5}$; **f.** $\frac{x+2}{2x-3}$

Esercizio	1	2	3	4	
Punteggio					

Valutazione in decimi