

## Gli insiemi $N$ e $Z$

### L'insieme $N$

#### 1 ESERCIZIO GUIDATO

**L'insieme  $N$ .** Sappiamo che i numeri naturali sono 0, 1, 2, 3, 4...

Dato un qualunque numero naturale tranne lo zero, esiste sempre un numero naturale che lo precede (detto **precedente**) ed un numero naturale che lo segue (detto **successivo**). Ad esempio dato il numero 23, il suo precedente è 22 e il suo successivo è 24.

Il numero 0 è l'elemento **minimo** dell'insieme dei numeri naturali e non esiste elemento **massimo**. Sappiamo, inoltre, che due numeri naturali come 10 ed 11 si dicono **consecutivi** e che dati due numeri naturali qualsiasi come, per esempio, 5 e 15, si dice che 5 è **minore** di 15 o anche che 15 è **maggiore** di 5.

Tenendo presente quanto ricordato, completa le seguenti frasi:

- dato il numero 46, il suo precedente è .....
- il numero 0 è l'elemento ..... dell'insieme
- i numeri 72 e 73 si dicono .....
- il numero 10 è ..... di 8.

#### 2 ESERCIZIO SVOLTO

**Le proprietà delle operazioni.** Abbiamo visto che le operazioni si possono eseguire spesso in modi diversi; ad esempio:

- calcolare  $3 + 5$  è la stessa cosa che calcolare  $5 + 3$ , mentre non è la stessa cosa calcolare  $8 - 2$  e  $2 - 8$
- per calcolare  $14 + 27 + 3$  si può eseguire prima  $27 + 3$  e poi sommare 14 al risultato ottenuto, si esegue cioè  $14 + (27 + 3)$
- per calcolare  $5 \cdot (2 + 5 - 4)$  si può anche calcolare  $5 \cdot 2 + 5 \cdot 5 - 5 \cdot 4$ .

Le operazioni di addizione e moltiplicazione godono delle seguenti proprietà:

- proprietà commutativa:  $5 + 6 = 6 + 5$   $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$
- proprietà associativa:  $(2 + 6) + 4 = 2 + (6 + 4)$   $(4 \cdot 5) \cdot 8 = 4 \cdot (5 \cdot 8)$

Le operazioni di moltiplicazione e divisione godono della seguente proprietà:

- proprietà distributiva rispetto all'addizione (o sottrazione):  
 $(30 + 10) : 5 = 30 : 5 + 10 : 5$   $(6 - 3) \cdot 12 = 6 \cdot 12 - 3 \cdot 12$

3 Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere e in tal caso quali proprietà sono state applicate:

- a.  $7 + 5 = 5 + 7$
- b.  $(3 + 2) + 1 = 3 + (2 + 1)$
- c.  $5 + 3 - 4 = 3 + 5 - 4$
- d.  $15 : 3 = 3 : 15$
- e.  $4 + (3 \cdot 8 : 6) = (4 + 3) \cdot (4 + 8) : (4 + 6)$
- f.  $12 \cdot (5 - 9 + 7) = 12 \cdot 5 - 12 \cdot 9 + 12 \cdot 7$ .

#### 4 ESERCIZIO SVOLTO

**L'elemento neutro.** Quando si eseguono delle operazioni, può capitare che esistano degli elementi che non hanno influenza sul risultato dell'operazione stessa. Ad esempio:

$$3 + 0 = 0 + 3 = 3 \qquad 6 \cdot 1 = 1 \cdot 6 = 6$$

Si dice allora che quell'elemento è l'**elemento neutro** dell'operazione.

L'elemento neutro dell'addizione è lo zero, l'elemento neutro della moltiplicazione è l'unità.

#### 5 ESERCIZIO SVOLTO

La sottrazione e la divisione non sono commutative e non sono associative; per queste operazioni vale però la **proprietà invariantiva**; ad esempio:

- $25 - 14 = (25 - 4) - (14 - 4) = 21 - 10 = 11$
- $32 - 18 = (32 + 2) - (18 + 2) = 34 - 20 = 14$
- $342 : 18 = (342 : 2) : (18 : 2) = 171 : 9 = 19$
- $125 : 25 = (125 \cdot 2) : (25 \cdot 2) = 250 : 50 = 5$

6 Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o sono false:

- a.  $20 : 4 = 4 : 20$
- b.  $(36 : 6) : 3 = 36 : (6 : 3)$
- c.  $120 : 20 = (120 : 10) : (20 : 10)$
- d.  $35 : 5 = (35 \cdot 2) : (5 \cdot 2)$

V F  
V F  
V F  
V F

## L'insieme Z

#### 7 ESERCIZIO GUIDATO

**L'insieme Z.** Sappiamo che numeri come +5 e -8 sono **discordi**, mentre due numeri come -3 e -9 oppure +2 e +14 sono **concordi**; inoltre numeri come -7 e +7 si dicono **opposti**. La scrittura  $|+5|$  indica il **modulo** del numero +5 e sappiamo che il modulo di un numero è il numero stesso considerato senza segno.

Tenendo presente quanto ricordato, completa i seguenti esercizi:

- a. -3 e -7 sono .....
- b. +8 è l'opposto di .....
- c.  $|-12| = \dots\dots\dots$
- d. +10 e -25 sono .....

**ESERCIZIO GUIDATO**

**Le operazioni in Z.** Calcola il risultato delle seguenti operazioni:

$$(+2) + (+3) = +2 + 3 = +5$$

se due numeri sono concordi si sommano i valori assoluti ed il segno rimane lo stesso.

$$(-2) + (-4) = -2 - 4 = \dots\dots\dots$$

$$(-7) + (+2) = -7 + 2 = -5$$

se due numeri sono discordi si calcola la differenza fra i valori assoluti e ad essa si attribuisce il segno del numero che ha il valore assoluto maggiore.

$$(+4) + (-5) = +4 - 5 = \dots\dots\dots$$

$$(+7) - (+8) = +7 - 8 = \dots\dots\dots$$

$$(-12) - (-24) = -12 + 24 = \dots\dots\dots$$

$$(-8) - (-4) = \dots\dots\dots$$

$$(-3) \cdot (+2) = -6 \quad \text{il prodotto di due numeri discordi è negativo}$$

$$(-4) \cdot (-8) = +32 \quad \text{il prodotto di due numeri concordi è positivo}$$

$$(-1) \cdot (-1) = \dots\dots\dots$$

$$(-8) \cdot (+4) = \dots\dots\dots$$

$$(+5) \cdot (+6) = \dots\dots\dots$$

$$(+7) \cdot (-12) = \dots\dots\dots$$

**ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

**a.**  $(+2 - 1) + [-3 \cdot (+2 - 7) + 4] - (-3 + 1) =$  esegui i calcoli nelle parentesi tonde  
 $= +1 + [-3 \cdot (-5) + 4] - (-2) =$  esegui il calcolo nella parentesi quadrata  
 $= 1 + \dots\dots\dots + 2 = \dots\dots\dots$

**b.**  $\{-(3 + 4) - [2 + 7 - (8 - 9)]\} \cdot [4 - (3 + 5)]$

**c.**  $[2 - (-3) \cdot (-6)] - \{4 - [-3 + 7 \cdot (+5 - 4 - 1)]\}$

**ESERCIZIO SVOLTO**

**Le potenze.** Sappiamo che la scrittura  $2^4$  è un modo abbreviato di scrivere il prodotto  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ; in generale, qualunque sia il numero  $a$  (naturale, intero), si ha che:

$$\blacksquare a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots\dots\dots \cdot a}_{n \text{ volte}} \quad \forall n \text{ intero maggiore di } 1$$

Ad esempio:  $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$        $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Si pone poi

■  $a^0 = 1$  se  $a \neq 0$

■  $a^1 = a$

Non si attribuisce invece alcun significato alla scrittura  $0^0$ .

**11** Completa, se è possibile, le seguenti uguaglianze in modo che risultino vere.

a.  $3^{\dots} = 81$

b.  $5^{\dots} = 1$

c.  $7^{\dots} = 14$

d.  $\dots^4 = 1$

e.  $2^{\dots} = -4$

f.  $(-3)^{\dots} = 1$

g.  $(-5)^{\dots} = +25$

h.  $(-2)^{\dots} = -32$

## 12 ESERCIZIO SVOLTO

**Le proprietà delle potenze.** Ricordiamo che, indicato con  $a$  un qualunque numero (naturale, intero) e con  $n$  e  $m$  due numeri naturali (senza che si presenti la situazione in cui  $a = 0$  e  $n = 0$  oppure  $m = 0$ ), si ha che

■  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$  prodotto di potenze con la stessa base, si sommano gli esponenti

■  $a^n : a^m = a^{n-m}$  quoziente di potenze con la stessa base, si sottraggono gli esponenti

■  $(a^n)^m = a^{nm}$  potenza di potenza, si moltiplicano gli esponenti

Inoltre, se  $b$  è un secondo numero sul quale facciamo le stesse ipotesi fatte su  $a$ :

■  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

■  $a^n : b^n = (a : b)^n$

Ad esempio:

$$4^3 \cdot 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$$

$$7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$$

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$$

$$3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2$$

$$8^2 : 4^2 = (8 : 4)^2 = 2^2$$

**Attenzione agli errori:**  $a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$ ; ad esempio  $3^2 + 5^2 \neq (3 + 5)^2$ .

**13** Calcola, applicando le proprietà delle potenze:

a.  $3^4 \cdot 3^7 \cdot 3^8$

b.  $3^4 : 3^3$

c.  $(3^4 \cdot 3^5) : 3$

d.  $(5^2)^3 : (5^2)^2$

e.  $(3^2 \cdot 5^2) : 15$

f.  $30^4 : 6^4$

g.  $(3^7 \cdot 3^3) : 3^5$

h.  $3^2 \cdot 3^5 : 3^7$

**14** Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o sono false correggendo quelle errate:

a.  $2^3 + 4^3 = 6^3$

b.  $2^4 + 2^5 = 2^9$

c.  $16^5 : 2^5 = 8^5$

d.  $(5^3)^2 : 5^6 = 0$

V F

V F

V F

V F

e.  $(2^3)^2 = 2^9$

f.  $2^3 \cdot 4^3 = 8^3$

g.  $3^6 : 3^3 = 3^{6:3} = 3^2$

h.  $5^2 - 3^2 = 2^2$

i.  $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^8$

l.  $5^4 \cdot 5^0 = 5^0$

V F

V F

V F

V F

V F

V F

**15** Calcola i valori delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze dovunque è possibile:

a.  $(-2)^5 \cdot (-2)^3 : (-2)^4$ ;  $(+4)^4 : (+4)^3 \cdot (+4)^6$

b.  $(+18)^2 : (-2)^2 \cdot [(-9)^2]^2$

c.  $[(-6)^2]^0 \cdot [(-6)^4]^5 : (-6)^{12}$

d.  $\left\{ [(-3)^2]^5 \right\}^2 : \left\{ [(-3)^3]^4 \right\}^0$

e.  $\left\{ [(-5)^3 \cdot (-5)^0] \cdot [-5 \cdot (-5)^4] \right\}^2 : [(-5)^4]^2$

### Risultati di alcuni esercizi.

**3.** a. V commutativa; b. V associativa; c. V commutativa; d. F; e. F; f. V distributiva.

**6.** a. F; b. F; c. V; d. V.

**9.** a. +22; b. +68; c. -23.

**11.** a.  $3^4$ ; b.  $5^0$ ; c. impossibile; d.  $1^4$ ; e. impossibile; f.  $(-3)^0$ ; g.  $(-5)^2$ ; h.  $(-2)^5$ .

**13.** a.  $3^{19}$ ; b. 3; c.  $3^8$ ; d.  $5^2$ ; e. 15; f.  $5^4$ ; g.  $3^5$ ; h. 1.

**14.** a. F; b. F; c. V; d. F; e. F; f. V; g. F; h. F; i. F; l. F.

**15.** a. 16,  $4^7$ ; b.  $9^6$ ; c.  $(-6)^8$ ; d.  $(-3)^{20}$ ; e.  $(-5)^8$ .