Misurare in radianti

Un altro modo di misurare gli angoli utilizza il confronto tra due lunghezze. Consideriamo un angolo α di vertice C e tracciamo una circonferenza avente centro in C e raggio arbitrario r; indichiamo con ℓ la lunghezza dell'arco AB individuato sulla circonferenza dall'angolo α (***figura 1a***).
Al variare di α anche la lunghezza dell'arco AB cambia (***figura 1b***) e, poiché gli angoli al centro di una circonferenza sono proporzionali agli archi che sottendono, si potrebbe pensare di assumere ℓ come misura di α; ciò però non è possibile perché per ogni angolo α la lunghezza dell'arco AB dipende dal raggio della circonferenza e non è costante (***figura 1c***).
Se cambia la lunghezza ℓ dell'arco AB, non cambia però il rapporto $\frac{\ell}{r}$ tra l'arco e il raggio; possiamo allora assumere questo rapporto come misura dell'angolo α.

Dato un angolo α e la circonferenza avente centro nel vertice dell'angolo e raggio r, si assume come misura di α il rapporto tra la lunghezza ℓ dell'arco sotteso da α e il raggio r:

$$\text{misura di } \alpha = \frac{\ell}{r}$$

L'unità di questo nuovo sistema di misurazione si chiama *radiante*.

Un **radiante** è l'ampiezza di un angolo al quale corrisponde un arco AB la cui lunghezza ℓ è uguale al raggio r.

In questo modo, ad esempio,

- un angolo giro misura

$$\frac{\text{lunghezza circonferenza rettificata}}{\text{raggio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

- un angolo piatto, essendo la metà di un angolo giro, misura, in radianti, π
- un angolo retto, essendo la metà di un angolo piatto, misura, in radianti, $\frac{\pi}{2}$.

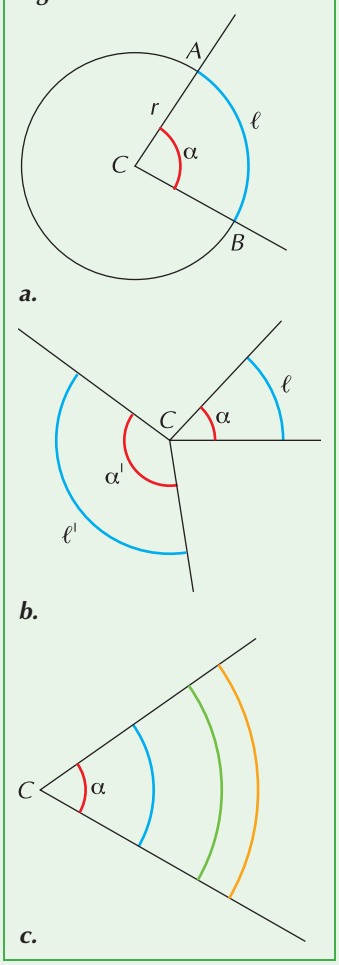
Nella tabella a lato abbiamo riportato la corrispondenza fra la misura in gradi e quella in radianti di alcuni angoli.
In generale, per passare da un sistema di misura all'altro, si usa la seguente proporzione

$$\pi : x = 180 : y$$

dove con x abbiamo indicato la misura dell'angolo in radianti e con y la misura dello stesso angolo in gradi.
Per esempio:

- se vogliamo sapere quanto misura in radianti un angolo di $22°30'$, trasfor-

Figura 1



α (gradi)	α (radianti)
0°	0
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3}{2}\pi$
360°	2π

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

miamo prima la misura dell'angolo in modo che sia espresso solo in gradi e poi utilizziamo la proporzione:

$22°30' = 22{,}5° \quad \rightarrow \quad \pi : x = 180 : 22{,}5$

da cui otteniamo che $x = 22{,}5 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}392699$

- se vogliamo sapere quanto misura in gradi un angolo che, in radianti, misura $\frac{\pi}{5}$ scriviamo la proporzione

$$\pi : \frac{\pi}{5} = 180 : y \quad \rightarrow \quad y = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{5}}{\pi} = 36°$$

In particolare, scrivendo 1 al posto di x nella proporzione e ricordando il valore di π (3,14159...), ricaviamo che 1 radiante corrisponde a $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$, cioè a circa 57°17′45″. In pratica:

- data la misura di un angolo in gradi sessagesimali, per averla in radianti basta moltiplicarla per $\frac{\pi}{180}$: $15° \rightarrow 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$
- data la misura di un angolo in radianti, per averla in gradi basta moltiplicarla per $\frac{180}{\pi}$ e, se questa è espressa in funzione di π, basta porre 180° al posto di π: $\frac{3}{4}\pi \rightarrow \frac{3}{4} \cdot 180° = 135°$

L'espressione $\frac{\pi}{180}$ rappresenta il tasso di conversione da gradi a radianti.

L'espressione $\frac{180}{\pi}$ rappresenta il tasso di conversione da radianti a gradi.

ESERCIZI

1 Indica quali sono le misure in gradi e in radianti di:
a. un angolo piatto
b. un angolo retto
c. un angolo giro

2 Completa:
a. se un angolo è misurato in gradi, la sua misura in radianti è espressa da .....
b. se un angolo è misurato in radianti, la sua misura in gradi è espressa da .....

3 Un angolo di ampiezza 215° in radianti misura:
a. $\frac{36}{43}\pi$ **b.** $\frac{43}{72}\pi$ **c.** $\frac{43}{36}\pi$ **d.** $\frac{43}{36}$

4 Se $\beta = 80°$ la sua misura in radianti è:
a. $\frac{9}{4}\pi$ **b.** $\frac{4}{9}\pi$ **c.** $\frac{4}{9\pi}$ **d.** $\frac{4}{9}$

5 Se $\gamma = \frac{7}{8}\pi$, la sua ampiezza in gradi è:
a. 315° **b.** 205°42′51″ **c.** 22°30′ **d.** 157°30′

6 Un angolo è ottuso; quale fra le seguenti relazioni caratterizza la sua misura α in radianti?
a. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ **b.** $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ **c.** $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ **d.** $\alpha > \frac{\pi}{2}$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Converti in radianti le misure espresse in gradi dei seguenti angoli.

7 **a.** $60°$ **b.** $90°$ **c.** $240°$ **d.** $-120°$

8 **a.** $45°$ **b.** $150°$ **c.** $135°$ **d.** $330°$

9 **a.** $22°30'$ **b.** $112°30'$ **c.** $48°45'$ **d.** $78°45'$

10 **a.** $54°45'$ **b.** $21°36'$ **c.** $337°30'$ **d.** $30°10'$

11 **a.** $2°$ **b.** $630°$ **c.** $-780°$ **d.** $900°$

Trasforma dal sistema radiale al sistema sessagesimale.

12 **a.** $\frac{\pi}{6}$ **b.** $\frac{\pi}{12}$ **c.** $\frac{\pi}{8}$ **d.** $\frac{\pi}{15}$

13 **a.** $\frac{5}{6}\pi$ **b.** $\frac{3}{4}\pi$ **c.** $\frac{1}{5}\pi$ **d.** $\frac{7}{8}\pi$

14 **a.** $\frac{\pi}{9}$ **b.** $\frac{4}{3}\pi$ **c.** $\frac{11}{6}\pi$ **d.** $\frac{7}{6}\pi$

15 **a.** $\frac{3}{5}\pi$ **b.** $\frac{5}{8}\pi$ **c.** $1{,}308$ **d.** $2{,}534$

Risolvi i seguenti problemi.

16 Gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sono complementari. Determina la loro ampiezza, in radianti, sapendo che $\widehat{A} = \frac{5}{7}\widehat{B}$. $\left[\frac{7}{24}\pi,\ \frac{5}{24}\pi\right]$

17 Un quadrilatero *ABCD* è inscritto in una circonferenza. Sapendo che gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ misurano rispettivamente $30°$ e $120°$, calcola la misura, in gradi e in radianti, degli altri due angoli.

$\left[\widehat{C} = 150°,\ \frac{5}{6}\pi;\ \widehat{D} = 60°,\ \frac{\pi}{3}\right]$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas