APPROFONDIMENTO

Le coniche degeneri

Data l'equazione di una conica, come possiamo stabilire se si tratta di una conica degenere?
La risposta a questa domanda si può dare attraverso il calcolo di un determinante.

Considerata l'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, e valutato il determinante della matrice A così definita:

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$$

si dimostra che:

- se $\det A = 0$ allora la conica è degenere.

Esempio.

Sia $x^2 + xy - 2y^2 + 4x + 5y + 3 = 0$ l'equazione di una conica; in essa: $a = 1$ $b = 1$ $c = -2$ $d = 4$ $e = 5$ $f = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che per calcolare il determinante di questa matrice si riportano le prime due colonne a lato della matrice e si calcola la somma dei prodotti lungo le diagonali principali meno la somma dei prodotti lungo le diagonali secondarie:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 2 & \frac{5}{2} & 3 & 2 & \frac{5}{2} \end{array} \right. = 1 \cdot (-2) \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} - \left(2 \cdot (-2) \cdot 2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

La conica è degenere.
Poiché $\Delta = 1 + 8 = 9$, si tratta di un'iperbole degenere. Per trovare le rette che la compongono risolviamo l'equazione rispetto a y:

$$2y^2 - y(x+5) - x^2 - 4x - 3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{(x+5) \pm \sqrt{(x+5)^2 - 8(-x^2 - 4x - 3)}}{4} = \frac{(x+5) \pm (3x+7)}{4}$$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Otteniamo dunque che la conica si scompone nelle due rette di equazione:

$$y = \frac{(x+5)-(3x+7)}{4} \quad \text{cioè} \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{(x+5)+(3x+7)}{4} \quad \text{cioè} \quad y = x+3$$

ESERCIZI

Date le seguenti coniche:
- stabiliscine la natura
- verifica che sono degeneri
- trova le rette o i punti in cui ciascuna di essa degenera.

1 $x^2 + 2xy - 4x = 0$

2 $x^2 - 9y^2 = 0$

3 $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9 = 0$

4 $x^2 + 5y^2 = 0$

5 $4x^2 - y^2 - y - 10x + 6 = 0$
(Suggerimento: risolvi l'equazione rispetto a una delle variabili)

6 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

7 $xy - y^2 + y = 0$

8 $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 12y + 4 = 0$

9 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

10 $(x-2)^2 + 3(y+1)^2 = 0$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas