Matematica in laboratorio

1. Il concetto di limite con Excel

Con l'aiuto di un foglio elettronico, in particolare di Excel, possiamo costruire facilmente la tabella delle coordinate dei punti di una funzione per x che tende ad un valore particolare.

Consideriamo ad esempio la funzione di equazione $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ e costruiamo l'insieme dei valori di y in corrispondenza dei valori di x che tendono a 1 per difetto e per eccesso.
Apri quindi un foglio di lavoro e costruisci nella colonna A, a partire dalla cella A2, la successione dei valori di x da 0,8 fino a 0,99 con passo 0,01 e poi nella colonna C a partire dalla cella C2, i valori da 0,991 fino a 0,999 con passo 0,001. Ricorda che per fare queste operazioni devi:

- inserire nella cella A2 il primo valore: 0,8
- inserire nella cella A3 successiva il secondo valore: 0,81
- selezionare le due celle e trascinare il quadratino nell'angolo in basso a destra.

Analogamente devi procedere per costruire la colonna C (osserva la figura seguente).
Nella cella B2 inserisci la formula per il calcolo di y:

$$= (A2\text{^}2 + A2 - 2) \ / \ (A2 - 1).$$

Copia ora la formula nelle colonne B e D in corrispondenza dei valori di x.

Se hai operato in modo corretto dovresti ottenere un foglio come quello rappresentato nella metà di sinistra della figura che segue.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	***x***	***y***	***x***	***y***		***x***	***y***	***x***	***y***
2	0,8	2,8	0,991	2,991		1,2	3,2	1,009	3,009
3	0,81	2,81	0,992	2,992		1,19	3,19	1,008	3,008
4	0,82	2,82	0,993	2,993		1,18	3,18	1,007	3,007
5	0,83	2,83	0,994	2,994		1,17	3,17	1,006	3,006
6	0,84	2,84	0,995	2,995		1,16	3,16	1,005	3,005
7	0,85	2,85	0,996	2,996		1,15	3,15	1,004	3,004
8	0,86	2,86	0,997	2,997		1,14	3,14	1,003	3,003
9	0,87	2,87	0,998	2,998		1,13	3,13	1,002	3,002
10	0,88	2,88	0,999	2,999		1,12	3,12	1,001	3,001
11	0,89	2,89				1,11	3,11		
12	0,9	2,9				1,1	3,1		
13	0,91	2,91				1,09	3,09		
14	0,92	2,92				1,08	3,08		
15	0,93	2,93				1,07	3,07		
16	0,94	2,94				1,06	3,06		
17	0,95	2,95				1,05	3,05		
18	0,96	2,96				1,04	3,04		
19	0,97	2,97				1,03	3,03		
20	0,98	2,98				1,02	3,02		
21	0,99	2,99				1,01	3,01		

Dunque per valori di x che tendono a 1 per difetto i valori di y sembrano avvicinarsi sempre di più a 3 (per difetto).

Ripeti ora la stessa procedura per costruire la successione dei valori di x a partire da 1,2 a 1,01 con passo $-0,01$ nella colonna F, e da 1,009 a 1,001 con passo $-0,001$ nella colonna H; nelle colonne G e I copia poi la formula di B2 come indicato nella metà destra della stessa figura.
I valori ottenuti ci dicono che, per x che tende a 1 da destra, cioè per valori di x che si avvicinano a 1 per eccesso, i valori di y tendono a 3 (per eccesso).

Utilizzando la scrittura di limite, sembra quindi che $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 3$.

In modo del tutto analogo puoi procedere, ad esempio, per analizzare il comportamento della funzione $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ per $x \to 0$.

Nella figura che segue puoi vedere un esempio di quello che si ottiene.

	A	B	C	D	E
1	*x*	*y*		*x*	*y*
2	-0,02	-49,4975		0,02	50,49752
3	-0,019	-52,1292		0,019	53,12923
4	-0,018	-55,0533		0,018	56,05333
5	-0,017	-58,3214		0,017	59,32142
6	-0,016	-61,998		0,016	62,99802
7	-0,015	-66,1648		0,015	67,16481
8	-0,014	-70,9268		0,014	71,92683
9	-0,013	-76,4214		0,013	77,42146
10	-0,012	-82,8318		0,012	83,83184
11	-0,011	-90,4077		0,011	91,40772
12	-0,01	-99,4987		0,01	100,4988
13	-0,009	-110,61		0,009	111,61
14	-0,008	-124,499		0,008	125,499
15	-0,007	-142,356		0,007	143,3563
16	-0,006	-166,166		0,006	167,1659
17	-0,005	-199,499		0,005	200,4994
18	-0,004	-249,499		0,004	250,4995
19	-0,003	-332,833		0,003	333,833
20	-0,002	-499,5		0,002	500,4998
21	-0,001	-999,5		0,001	1000,5

Sembra quindi che, per x che tende a zero per difetto, la funzione tenda ad assumere valori negativi sempre più grandi in modulo, mentre per x che tende a zero per eccesso, tenda ad assumere valori positivi sempre più grandi. Questo ci induce a pensare che

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = +\infty$$

2. Il calcolo dei limiti con GeoGebra e con Wiris

Usiamo GeoGebra

I comandi di GeoGebra per il calcolo del limite di una funzione sono i seguenti:

- **Limite (funzione, valore)**
  Calcola il limite della funzione indicata come primo argomento per x che tende al valore indicato come secondo argomento.
- **LimiteSinistro (funzione, valore)**
  Calcola il limite sinistro della funzione, cioè per x che appartiene ad un intorno sinistro del valore indicato.

■ **LimiteDestro (funzione, valore)**
Calcola il limite destro della funzione, cioè per x che appartiene ad un intorno destro del valore indicato.

L'espressione della funzione può essere scritta direttamente come parametro del comando, oppure il parametro può fare riferimento ad una funzione che è già stata indicata; il risultato viene poi proposto nella finestra di Algebra ($+\infty$ viene scritto ∞, omettendo il segno).

Per esempio, per calcolare $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ si possono usare i seguenti metodi:

- scrivere direttamente

$$\text{Limite}\ \left((x^2 - 2x - 3)/(x - 3), 3\right)$$

- definire prima la funzione e poi calcolare il limite:

$$f(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x - 3)$$
$$\text{Limite}\ (f(x), 3)$$

Conviene usare la seconda modalità quando si devono calcolare i limiti di una stessa funzione per x che tende a più valori diversi: in questo caso, dopo aver definito la funzione, se ne ottiene anche il grafico nella vista grafica.

Usiamo Wiris

Per calcolare il limite di una funzione dobbiamo aprire il menu **Analisi** e usare le icone per il calcolo del limite. La procedura è analoga a quella applicata con GeoGebra:

- scriviamo prima l'espressione della funzione assegnandole un nome
- impostiamo il calcolo del limite.

Nella figura che segue puoi vedere alcuni esempi.