Concetti chiave e regole

Funzioni

È una funzione ogni relazione che lega gli elementi di due insiemi A e B in modo che ad ogni elemento di A corrisponda uno e un solo elemento di B.
Una funzione f può essere:

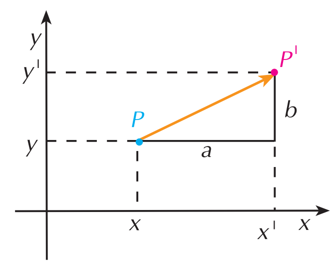
- **suriettiva** se l'insieme delle immagini coincide con B
- **iniettiva** se elementi distinti di A hanno per immagini elementi distinti di B
- **biiettiva** se è sia suriettiva che iniettiva.

Una funzione biiettiva stabilisce una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di A e quelli di B.
Gli elementi dell'insieme A costituiscono il **dominio** della funzione, quelli dell'insieme B che sono immagini di almeno un elemento di A rappresentano il **codominio**.
Una funzione f è invertibile se la corrispondenza che si ottiene scambiando gli insiemi A e B è ancora una funzione. Le sole funzioni invertibili sono quelle biiettive.

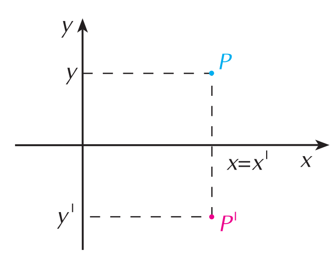
Isometrie

Un'**isometria** è una trasformazione geometrica che ad ogni segmento AB fa corrispondere un segmento $A'B'$ congruente ad AB. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, le equazioni delle isometrie più significative sono:

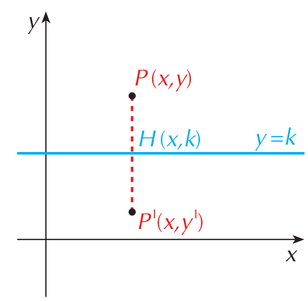
- traslazione di vettore $\vec{v} = (a,\ b)$ $\quad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$



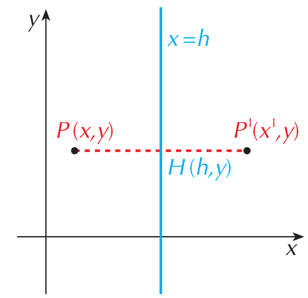
- simmetria rispetto all'asse x $\quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$



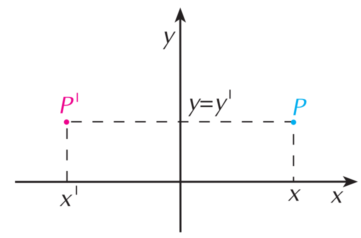
- simmetria rispetto alla retta $y = k$ $\quad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2k - y \end{cases}$



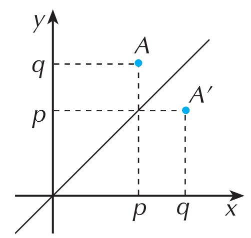
- simmetria rispetto alla retta $x = h$ $\quad \begin{cases} x' = 2h - x \\ y' = y \end{cases}$



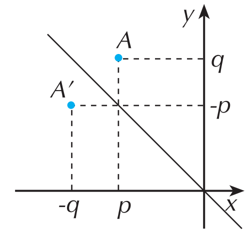
- simmetria rispetto all'asse y $\quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$



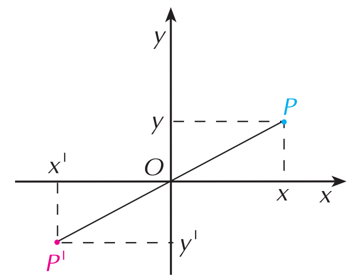
- simmetria rispetto alla retta $y = x$ $\quad \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$



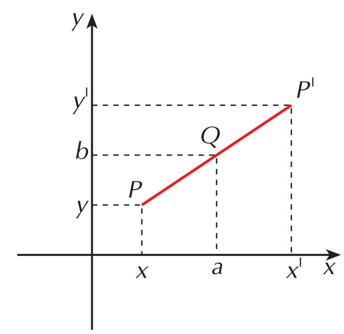
- simmetria rispetto alla retta $y = -x$ $\quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$



- simmetria rispetto all'origine $\quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$



- simmetria rispetto al punto $Q(a, b)$ $\quad \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$



Data l'equazione $y = f(x)$ di una funzione, per trovare quella della sua corrispondente in una delle trasformazioni indicate, si deve:

- ricavare le espressioni di x e di y dalle equazioni della trasformazione in funzione di x' e y'
- eliminare gli apici dalle espressioni ottenute e sostituirle al posto di x e y nell'equazione della funzione.

Isometrie e funzioni

Data $y = f(x)$ e indicata con Γ la curva corrispondente, si ha che il grafico di:

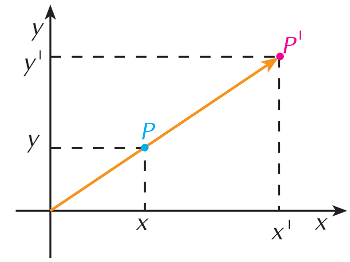
- $y = -f(x)$ è il simmetrico di Γ rispetto all'asse x;

- $y = f(-x)$ è il simmetrico di Γ rispetto all'asse y;
- $y = |f(x)|$ è il grafico di Γ per $y \geq 0$, il suo simmetrico rispetto all'asse x per $y < 0$;
- $y = f(|x|)$ è il grafico di Γ per $x \geq 0$, il suo simmetrico rispetto all'asse y per $x < 0$;
- $y = f(x) + k$ è il grafico di Γ traslato del vettore $\vec{v} = (0,\ k)$;
- $y = f(x + h)$ è il grafico di Γ traslato del vettore $\vec{v} = (-h,\ 0)$.

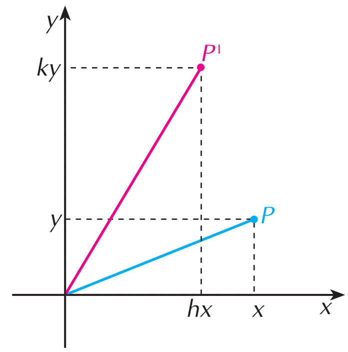
Omotetie e dilatazioni

Le equazioni dell'**omotetia** avente centro nell'origine e rapporto k sono

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$



Le equazioni della **dilatazione** avente centro nell'origine e rapporti lungo gli assi cartesiani rispettivamente h e k sono $\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$



In particolare, se Γ è il grafico di $f(x)$, quello di:

- $y = k\,f(x)$, si ottiene con la dilatazione di Γ del fattore k lungo l'asse y;
- $y = f(hx)$, si ottiene con la dilatazione di Γ del fattore h lungo l'asse x.