La probabilità

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

La definizione classica di probabilità. Il valore di probabilità di un evento E esprime una misura della possibilità che ha quell'evento di verificarsi; indicato con f il numero di casi favorevoli ad E e con n il numero dei casi possibili, la probabilità in senso classico è data da:

$$p(E) = \frac{f}{n}$$

Per esempio,

- dato l'evento E : «esce il numero 3» relativo all'esperimento aleatorio del lancio di un dado, si ha che:
  - i casi possibili sono 6, quelli dello spazio campionario $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - vi è un solo caso favorevole

  quindi $p(E) = \frac{1}{6}$
- dato l'evento E : «esce testa» relativo all'esperimento aleatorio del lancio di una moneta, si ha che:
  - i casi possibili sono $2 : \Omega = \{T, C\}$
  - vi è un solo caso favorevole

  quindi $p(E) = \frac{1}{2}$
- dato l'evento E : «esce un numero rosso» giocando alla roulette, si ha che:
  - i casi possibili sono 37
  - i casi favorevoli sono 18 (nel gioco della roulette ci sono 18 numeri rossi e 18 numeri neri, 0 non è né rosso né nero)

  quindi $p(E) = \frac{18}{37}$.

2 Servendoti della definizione classica, calcola la probabilità dei seguenti eventi:
a. lanciando un dado, E : «esce un numero dispari»
b. estraendo una carta da un mazzo di 40, E : «viene estratto il tre di cuori»
c. estraendo una carta da un mazzo di 40, E : «viene estratto un due»
d. estraendo a caso una cifra della numerazione decimale, E : «esce 8».

3 In una classe ci sono 25 studenti e l'insegnante decide di controllare il quaderno dei compiti a uno studente scelto a caso dall'elenco del registro di classe. Determina la probabilità che:
a. esca il dodicesimo studente dell'elenco

b. esca uno studente fra i primi 10 dell'elenco

c. se ci sono 4 studenti il cui cognome inizia con la lettera C, esca uno studente il cui cognome non inizia con la lettera C.

4 Lanciando un dado, qual è la probabilità di ottenere:

a. il numero 6

b. un numero minore di 3

c. un numero primo.

5 **ESERCIZIO SVOLTO**

Eventi composti. Un evento E si dice composto se è il risultato della combinazione di altri eventi semplici; in particolare si parla di:

- **evento unione** di altri due eventi A e B se E è verificato quando si verifica almeno uno dei due eventi A o B.
  Per esempio, nell'esperimento aleatorio del lancio di un dado, se A è l'evento «esce 3» e B è l'evento «esce 1», l'evento unione è «esce 3 oppure 1».
- **evento intersezione** di altri due eventi A e B se E è verificato quando si verificano entrambi gli eventi A e B.
  Per esempio, nell'esperimento aleatorio delle estrazioni dei numeri della tombola, se A è l'evento «esce un numero minore di 50» e B è l'evento «esce un numero maggiore di 20», l'evento intersezione è «esce un numero compreso tra 20 e 50, estremi esclusi».

Diciamo poi che:

- due eventi sono **incompatibili** se la loro intersezione è vuota, cioè se il verificarsi dell'uno implica il non verificarsi dell'altro; si dicono compatibili in caso contrario.
  Per esempio, nelle estrazioni del Lotto sono incompatibili gli eventi «esce un numero pari» e «esce un numero dispari».
- due eventi sono **indipendenti** se il verificarsi dell'uno non influenza il verificarsi dell'altro; si dicono dipendenti in caso contrario.
  Per esempio, nell'estrazione di due carte da un mazzo, gli eventi «esce un asso di cuori» e «esce una carta di colore rosso» sono dipendenti.

Per determinare la probabilità di un evento composto ci vengono in aiuto i seguenti teoremi.

- **Teorema della probabilità totale**. La probabilità dell'evento E unione di due eventi A e B è uguale a:

  $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

  La formula si semplifica se i due eventi sono incompatibili perché, in questo caso, $p(A \cap B) = 0$, ed è:

  $$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

- **Torema della probabilità composta**. La probabilità dell'evento E intersezione di due eventi A e B è uguale a:

  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ se gli eventi sono indipendenti

  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A)$ se l'evento B dipende dal verificarsi di A

  dove il simbolo $p(B \mid A)$ indica la probabilità che ha l'evento B di verificarsi sapendo che si è verificato A.

6 Dati i seguenti eventi, individua gli eventi elementari componenti e stabilisci se si tratta della loro unione o dell'intersezione:

a. nel lancio di una moneta e di un dado, E : «esce testa e un numero pari»

b. nel campionato di calcio di serie A, E : «la Roma o la Lazio vincono lo scudetto»

c. nel campionato costruttori di Formula 1, E : «le prime due classificate sono nell'ordine la Ferrari e la Mercedes»

d. agli scrutini di fine anno scolastico, E : «Lucia e Franco sono promossi alla classe successiva».

7 Individua quali fra le seguenti coppie di eventi sono compatibili o incompatibili:

a. A : «esce una carta di cuori» B : «esce una figura»
nell'estrazione di una carta da un mazzo

b. A : «esce un re» B : «esce un asso»
nell'estrazione di una carta da un mazzo

c. A : «esce testa» B : «esce croce»
nel lancio di una moneta

d. A : «esce un numero minore di 10» B : «esce un numero maggiore di 5»
nell'estrazione di un numero della tombola.

8 Individua quali fra le seguenti coppie di eventi sono dipendenti o indipendenti:

a. A : «esce una carta di fiori» B : «esce un tre»
nell'estrazione successiva di due carte da un mazzo senza che ci sia un reinserimento della prima carta estratta

b. A : «esce una carta di quadri» B : «esce una donna»
nell'estrazione successiva di due carte da un mazzo con reinserimento della prima carta estratta nel mazzo

c. A : «esce 6» B : «esce 2»
nel lancio di un dado

9 **ESERCIZIO GUIDATO**

Un'urna contiene 3 palline rosse, 4 palline gialle e 15 palline nere; si estrae una pallina. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:

a. E : «esce una pallina rossa o nera»

b. E : «esce una pallina gialla o rossa»

c. E : «esce una pallina gialla o nera».

Le palline contenute nell'urna sono in totale 22; la probabilità che esca una pallina rossa è $\frac{3}{22}$; quella che esca una pallina nera è $\frac{15}{22}$; essendo gli eventi incompatibili si ha quindi:

$p(E) = \frac{3}{22} + \frac{15}{22} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$.

Procedi analogamente per i casi **b.** e **c.**

10 Calcola la probabilità che, nel gioco della roulette, esca:

a. un numero minore di 10 compreso lo zero, oppure un numero maggiore o uguale a 30

b. un numero pari oppure un numero minore di 10, escluso lo 0

c. un numero rosso oppure lo zero.

(Suggerimento: attenzione al caso **b.**: gli eventi componenti sono compatibili, devi quindi calcolare l'intersezione degli insiemi dei casi favorevoli a tali eventi)

11 **ESERCIZIO SVOLTO**

Consideriamo due urne, la prima contiene 4 palline nere, 3 rosse e 10 verdi, la seconda contiene 12 palline verdi e 15 nere; viene estratta una pallina da ciascuna urna. Calcoliamo la probabilità dei seguenti eventi:

a. *E*: «escono due palline nere»

b. *E*: «escono una pallina nera e una verde».

Poiché le estrazioni avvengono da due urne diverse, gli eventi componenti sono indipendenti in entrambi i casi richiesti. Possiamo dunque procedere in questo modo:

a. la probabilità che la pallina estratta dalla prima urna sia nera è $\frac{4}{17}$;

la probabilità che la pallina estratta dalla seconda urna sia nera è $\frac{15}{27}=\frac{5}{9}$;

quindi $p(E)=\frac{4}{17}\cdot\frac{5}{9}=\frac{20}{153}$

b. la probabilità dell'evento richiesto è data dall'unione di due eventi:

A: «la prima pallina estratta è nera e la seconda è verde»

B: «la prima pallina estratta è verde e la seconda è nera»

Si ha che: $p(A)=\frac{4}{17}\cdot\frac{12}{27}=\frac{16}{153}$ $\quad p(B)=\frac{10}{17}\cdot\frac{15}{27}=\frac{50}{153}$

quindi $p(E)=\frac{16}{153}+\frac{50}{153}=\frac{66}{153}=\frac{22}{51}$

12 Un'urna contiene 20 palline bianche e 15 rosse. Calcola la probabilità che, estraendone due in successione e senza rimettere la prima estratta nell'urna:

a. escano due palline bianche

b. la prima pallina sia rossa e la seconda sia bianca

c. siano una rossa e una bianca.

(Suggerimento: l'estrazione è senza reinserimento, quindi la probabilità del secondo evento è condizionata dal verificarsi del primo)

Risultati di alcuni esercizi.

2. **a.** $\frac{1}{2}$; **b.** $\frac{1}{40}$; **c.** $\frac{1}{10}$; **d.** $\frac{1}{10}$ **3.** **a.** $\frac{1}{25}$; **b.** $\frac{2}{5}$; **c.** $\frac{21}{25}$ **4.** **a.** $\frac{1}{6}$; **b.** $\frac{1}{3}$; **c.** $\frac{1}{2}$

6. **a.** intersezione; **b.** unione; **c.** intersezione; **d.** intersezione

7. **a.** compatibili; **b.** incompatibili; **c.** incompatibili; **d.** compatibili

8. **a.** dipendenti; **b.** indipendenti; **c.** indipendenti

9. **b.** $\frac{7}{22}$; **c.** $\frac{19}{22}$ **10.** **a.** $\frac{18}{37}$; **b.** $\frac{23}{37}$; **c.** $\frac{19}{37}$ **12.** **a.** $\frac{38}{119}$; **b.** $\frac{30}{119}$; **c.** $\frac{60}{119}$